B_φ-СПЛАЙНЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ*

Ю. К. Демьянович
Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu

25 июня 2011 г.

Аннотация

В работе даны необходимые и достаточные условия существования и гладкости пространств $\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}, \varphi)$ (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов второго порядка. Установлено, что во множестве этих пространств (при фиксированной сетке X и функции φ) существует лишь одно пространство из класса C^1. Доказана вложенность упомянутых пространств для вложенных сеток. Установлены калибровочные соотношения и приведены примеры.

Сплайновые аппроксимации получили широкое применение в теории и на практике (см. [1–10]). Существенным моментом при построении сплайнов стало использование аппроксимационных соотношений, появившихся первоначально в методе конечных элементов и названных С. Г. Михлиным фундаментальными соотношениями (см. [5–7]). На использовании упомянутых соотношений базируются не только свойства аппроксимации, гладкости и интерполяции сплайнами, но также и вэйвлетные разложения.

1. B_φ-сплайны

Рассмотрим минимальные сплайны на конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ с сеткой $X :=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X : \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots .$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00245 и 10-01-297

Считаем, что

$$\alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j, \quad \beta = \lim_{j\to+\infty} x_j.$$

Пусть $\varphi(t)$ — трёхкомпонентная вектор-функция (вектор-столбец) с компонентами из $C^2(\alpha,\beta)$, такая, что вронскиан её компонент отделён от нуля:

$$|\det(\varphi,\varphi',\varphi'')(t)| \geqslant c > 0 \quad \forall t \in (\alpha,\beta). \tag{1}$$

Рассмотрим множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}$ трёхмерных векторов $\mathbf{a}_j$ пространства $\mathbb{R}^3$ со свойством

$$\det(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Такое множество называем полной цепочкой $\mathbf{A}$ векторов $\mathbf{a}_j$. Множество всех полных цепочек обозначим $\mathcal{A}$.

Если $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, то функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, однозначно определяются из условий

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k,x_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}; \qquad \operatorname{supp}\omega_j = [x_j,x_{j+3}]\ \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k,x_{k+1})$ соотношения (2) содержат не более трёх ненулевых слагаемых,

$$\mathbf{a}_{k-2}\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k\,\omega_k(t) \equiv \varphi(t). \tag{3}$$

При указанном t соотношения (3) будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. По теореме Крамера найдём

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t),\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}, \tag{4}$$

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\varphi(t),\mathbf{a}_k\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}, \tag{5}$$

$$\omega_k(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\varphi(t)\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\bigr)}. \tag{6}$$

Произвольно фиксируя $j \in \mathbb{Z}$ и последовательно полагая $k = j$, $k = j+1$, $k = j+2$ в (6), в (5) и в (4) соответственно, получаем соотношения

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t)\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j\bigr)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_j,x_{j+1}), \tag{7}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1}\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1}\bigr)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+1},x_{j+2}), \tag{8}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2}\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2}\bigr)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+2},x_{j+3}), \tag{9}$$

которые (см. (2)) следует дополнить включением

$$\operatorname{supp}\omega_j \subset [x_j, x_{j+3}].$$

Благодаря предположению (1) функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, образуют линейно независимую систему. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}, \varphi) := \{u \mid u(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\, \omega_j(t)\ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Оно называется *пространством минимальных* $(X, \mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов второго порядка.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$. Для того, чтобы производную s-го порядка можно было продолжить непрерывным образом на интервал (α, β) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi^{(s)})(x_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Введём обозначения $\varphi_j := \varphi(x_j)$, $\varphi'_j := \varphi'(x_j)$, и рассмотрим частный случай соотношений (2):

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}^*_{j'}\, \omega^*_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{supp}\omega^*_j = [x_j, x_{j+3}]\ \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

где векторы $\mathbf{a}^*_j$ получаются раскрытием символического определителя (вычеркиванием первой строки)

$$\mathbf{a}^*_j := \det\begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Заметим, что благодаря условию (1) при достаточно мелкой сетке X цепочка $\mathbf{A}^* := \{\mathbf{a}^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная. Легко проверить, что

$$\det(\mathbf{a}^*_{j-2}, \mathbf{a}^*_{j-1}, \varphi_j) = 0, \qquad \det(\mathbf{a}^*_{j-2}, \mathbf{a}^*_{j-1}, \varphi'_j) = 0.$$

Согласно теореме 1 находим $\omega^*_j \in C^1(\alpha, \beta)$. Рассматривая линейное пространство

$$\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi) := \{u \mid u(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\, \omega^*_j(t)\ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\},$$

получаем

$$\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi) \subset C^1(\alpha, \beta).$$

ТЕОРЕМА 2. *Во множестве* $\{\mathbb{S}_2(X,\mathbf{A},\varphi)\}_{\mathbf{A}\in\mathcal{A}}$ *пространств* $\mathbb{S}_2(X,\mathbf{A},\varphi)$ *существует единственное пространство класса* $C^1(\alpha,\beta)$. *Таким пространством является пространство* $\mathbb{S}_2(X,\mathbf{A}^*,\varphi)$.

ТЕОРЕМА 3. *Каждая функция* $\omega_j^*(t)$ *определяется значениями вектор-функции* $\varphi(t)$ *на множестве* $\operatorname{supp}\omega_j^*$.

Функции $\omega_j^*(t)$ называются B_φ-сплайнами. Рассмотрим два примера B_φ-сплайнов, выбирая вектор-функцию φ по-разному. В первом случае в качестве компонент вектор-функции $\varphi(t)$ берём 1, t, t^2 и в результате получаем известный полиномиальный базисный сплайн второй степени, обозначаемый здесь ω_j^B. Во втором случае компонентами упомянутой вектор-функции служат 1, $\sin t$, $\cos t$; в результате получается тригонометрический базисный сплайн “второго порядка” (обозначаемый ω_j^T, см. [10]).

1) *Полиномиальный базисный сплайн второй степени.* Пусть

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}1\\ t\\ t^2\end{pmatrix}.$$

По формулам (11) находим полную цепочку векторов

$$\mathbf{a}_j^\star=2(x_{j+2}-x_{j+1})\begin{pmatrix}1\\ \frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}\\ x_{j+1}\,x_{j+2}\end{pmatrix}.$$

Положим $c_j=\frac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+1})^{-1}$. После подстановки $\mathbf{a}_j=c_j\,\mathbf{a}_j^\star$ в равенства (7)–(9) получаем известный полиномиальный B-сплайн ω_j^B второй степени:

$$\operatorname{supp}\omega_j^B=[x_j,x_{j+3}],$$

$$\omega_j^B(t)=\frac{(t-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)}\quad\text{при}\quad t\in[x_j,x_{j+1}),$$

$$\omega_j^B(t)=(x_{j+2}-x_j)^{-1}(x_{j+2}-x_{j+1})^{-1}(x_{j+3}-x_{j+1})^{-1}\times$$

$$\times\Big[(x_j-x_{j+2}-x_{j+3}+x_{j+1})\,t^2-2(x_{j+1}x_j-x_{j+2}x_{j+3})\,t+x_jx_{j+1}x_{j+3}-$$

$$-\,x_jx_{j+2}x_{j+3}+x_jx_{j+1}x_{j+2}-x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}\Big]\quad\text{при}\quad t\in[x_{j+1},x_{j+2}),$$

$$\omega_j^B(t)=\frac{(t-x_{j+3})^2}{(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+1})}\quad\text{при}\quad t\in[x_{j+2},x_{j+3}].$$

2) *Тригонометрический базисный сплайн второго порядка.* Возьмем теперь

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ \cos\ t \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что

$$x_{j+1} - x_j < \pi \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

по формулам (11) получаем полную цепочку векторов

$$\mathbf{a}_j^\star = -2\sin\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \\ \sin\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} \\ \cos\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $c_j = -\frac{1}{2}\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\Bigr)$. После подстановки $\mathbf{a}_j = c_j\,\mathbf{a}_j^\star$ в равенства (7)–(9) находим тригонометрический сплайн ω_j^T второго порядка:

$$\operatorname{supp}\omega_j^T = [x_j, x_{j+3}], \tag{12}$$

$$\omega_j^T(t) = \sin^2\Bigl(\frac{t-x_j}{2}\Bigr)\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\Bigr)\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\Bigr) \quad \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\omega_j^T(t) = \frac{1}{2}\Biggl[&\sin\Bigl(\frac{x_{j+2}+x_{j+3}}{2} - t\Bigr)\cos\frac{x_{j+1}-x_j}{2} + \\ &+\sin\Bigl(t - \frac{x_j+x_{j+1}}{2}\Bigr)\cos\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2} + \\ &+\sin\frac{x_{j+1}+x_j-x_{j+2}-x_{j+3}}{2}\Biggr]\times \\ &\times\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\Bigr)\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\Bigr)\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+2}-x_j}{2}\Bigr) \\ &\text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\omega_j^T(t) = \sin^2\Bigl(\frac{t-x_{j+3}}{2}\Bigr)\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\Bigr)\sin^{-1}\Bigl(\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}\Bigr) \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}]. \tag{15}$$

Аналогично B-сплайну второй степени функция $\omega_j^T(t)$, задаваемая формулами (12)–(15), непрерывно дифференцируема на вещественной оси, вогнута на интервалах (x_j, x_{j+1}) и (x_{j+2}, x_{j+3}), выпукла на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}), положительна на интервале (x_j, x_{j+3}), а её вторая производная имеет неустранимые разрывы первого рода в точках x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}.

2. Калибровочные соотношения

Укрупним исходную сетку X выбрасыванием узла x_{k+1}, а именно, положим

$$\widetilde{x}_j = x_j \quad \text{при } j \le k, \qquad \widetilde{x}_j = x_{j+1} \quad \text{при } j \ge k+1,$$

и рассмотрим новую сетку $\widetilde{X} := \{\widetilde{x}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$\widetilde{X}: \ \ldots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots .$$

Используя новую сетку и полагая $\widetilde{\varphi}_j := \varphi'(\widetilde{x}_j)$, $\widetilde{\varphi}'_j := \varphi'(\widetilde{x}_j)$, рассмотрим аппроксимационные соотношения

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{j'}\, \widetilde{\omega}^*_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1})\ \forall k \in \mathbb{Z}; \qquad \operatorname{supp} \widetilde{\omega}_j = [\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+3}]\ \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

при

$$\widetilde{\mathbf{a}}^*_j := \det \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{j+1} & \widetilde{\varphi}'_{j+1} \\ \det(\widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}, \widetilde{\varphi}_{j+1}) & \det(\widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Пространство B_φ-сплайнов на новой сетке обозначим

$$\mathbb{S}_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbf{A}}^*, \varphi) := \{u \mid u(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\, \widetilde{\omega}^*_j(t) \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\},$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}^* := \{\widetilde{\mathbf{a}}^*_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство B_φ-сплайнов на сетке X содержит пространство B_φ-сплайнов на укрупнённой сетке $\widetilde{X}$:*

$$\mathbb{S}_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbf{A}}^*, \varphi) \subset \mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi). \tag{17}$$

Доказательство. Из определения укрупнённой сетки следует, что

$$\widetilde{\omega}^*_j(t) \equiv \omega^*_j(t), \quad \widetilde{\mathbf{a}}^*_j = \mathbf{a}^*_j \quad \text{при } j \leqslant k-3, \tag{18}$$

$$\widetilde{\omega}^*_{j+1}(t) \equiv \omega^*_j(t), \quad \widetilde{\mathbf{a}}^*_j = \mathbf{a}^*_{j+1} \quad \text{при } j \geqslant k+1. \tag{19}$$

На основании (10) и (16) имеем

$$\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{j'}\, \widetilde{\omega}^*_{j'}(t) \equiv \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}^*_j\, \omega^*_j(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta),$$

откуда после уничтожения одинаковых слагаемых, определяемых соотношениями (18) и (19), получаем

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-2}\, \widetilde{\omega}^*_{k-2}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\, \widetilde{\omega}^*_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}^*_k\, \widetilde{\omega}^*_k(t) \equiv \mathbf{a}^*_{k-2}\, \omega^*_{k-2}(t) + \\ + \mathbf{a}^*_{k-1}\, \omega^*_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\, \omega^*_k(t) + \mathbf{a}^*_{k+1}\, \omega^*_{k+1}(t). \end{gathered} \tag{20}$$

Из (20) видно, что функции $\widetilde{\omega}^*_{k-2}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_{k-1}(t)$, $\widetilde{\omega}^*_{k}(t)$ выражаются через базисные функции пространства $\mathbb{S}_2(X, \mathbf{A}^*, \varphi)$. Принимая также во внимание соотношения (18) и (19), приходим к формуле (17). $\square$

Соотношения, выражающие сплайны на укрупнённой сетке через сплайны на исходной сетке, принято называть *калибровочными соотношениями*(см. [9]).

Введём обозначение $\mathbf{n}_j := \varphi_j \times \varphi'_j$, где знак $\times$ означает векторное произведение.

ТЕОРЕМА 5. *Справедливы следующие калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}^\star_{k-2}(t) = \omega^\star_{k-2}(t) + \frac{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+2})}{\det(\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2})}\,\omega^\star_k(t), \tag{21}$$

$$\widetilde{\omega}^\star_{k-1}(t) = \frac{\det(\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1})}{\det(\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2})}\omega^\star_k(t) + \frac{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2}, \mathbf{n}_{k+3})}{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2}, \mathbf{n}_{k+3})}\,\omega^\star_{k+1}(t), \tag{22}$$

$$\widetilde{\omega}^\star_{k}(t) = \frac{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+2})}{\det(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+2}, \mathbf{n}_{k+3})}\,\omega^\star_{k+1}(t) + \omega^\star_{k+1}(t). \tag{23}$$

Если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, то из (21)–(23) выводим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}^\star_{k-2}(t) &= \omega^\star_{k-2}(t) + \\
&\quad + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_{k-1}} \cdot \omega^\star_{k-1}(t), && (24)\\
\widetilde{\omega}^\star_{k-1}(t) &= \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{x_{k+2} - x_{k-1}} \cdot \omega^\star_{k-1}(t) + \\
&\quad + \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot \frac{x_{k+3} - x_{k+1}}{x_{k+3} - x_k} \cdot \omega^\star_k(t), && (25)\\
\widetilde{\omega}^\star_{k}(t) &= \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+3} - x_k} \cdot \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+3} - x_{k+2}} \cdot \omega^\star_k(t) + \\
&\quad + \omega^\star_{k+1}(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta). && (26)
\end{aligned}$$

Если же в рассматриваемом примере исходная сетка X задана на всей вещественной оси (то есть $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$) и является равномерной (то есть при некоторых $a, h \in \mathbb{R}^1$, $h > 0$, узлы сетки задаются формулой $x_j := jh + a$), то соотношения (24)–(26) принимают вид

$$\widetilde{\omega}^\star_{k-2}(t) = \omega^\star_{k-2}(t) + \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_{k-1}(t), \quad \widetilde{\omega}^\star_{k-1}(t) = \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_{k-1}(t) + \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_k(t),$$
$$\widetilde{\omega}^\star_{k}(t) = \frac{1}{3} \cdot \omega^\star_k(t) + \omega^\star_{k+1}(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике.* М., 1976. 248 с.

2. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Л., 1986. 120 с.

3. L. L. Schumaker. *On super splines and finite elements* // SIAM J. Numer. Anal., 1989. Vol. 26. P. 997–1005.

4. M. D. Buhmann. *Multiquadratic Prewavelets on Nonequally Spaced Knots in One Dimension* // Math. of Comput., 1995. Vol. 64, № 212. P. 1611–1625.

5. Goel J. J. *Construction of basis functions for numerical utilization of Ritz's method* // Numer. Math. 1968. Vol. 12. P. 435–447.

6. Михлин С. Г. *Вариационно-сеточная аппроксимация* //Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. Т. 48. С. 32–188.

7. Демьянович Ю. К., Михлин С. Г. *О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1973. Т. 35. С. 6–11.

8. Бурова И. Г., Демьянович Ю. К. *Теория минимальных сплайнов.* Издательство СПбГУ. 2000. 316 с.

9. Демьянович Ю.К. *Всплесковые разложения на неравномерной сетке* // Труды СПбМО, 2007. Т. 13. С. 27–51.

10. Демьянович Ю.К. *Вложеннные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение* // Ж. Математические Заметки, 2005. Т. 78, вып. 5. С. 22–26.