ОБОБЩЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА КЛАССА C^2 *

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

16 мая 2009 г.

В докладе показано, как построить поверхность класса C^2, натянутую на заданную сеть кривых.

1°. Пусть заданы два отрезка на вещественной оси и в каждом из них выбрано несколько узлов:

$$
\begin{aligned}
a \leqslant u_1 < u_2 < \cdots < u_m \leqslant b, \qquad m \geqslant 2,\\
c \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_n \leqslant d, \qquad n \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Кроме того, пусть заданы два набора кривых в пространстве $\mathbb{R}^s$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_i \colon [c,d] \to \mathbb{R}^s, \qquad \mathbf{f}_i \in C^2\big([c,d]\big), \qquad i \in 1:m,\\
\mathbf{g}_j \colon [a,b] \to \mathbb{R}^s, \qquad \mathbf{g}_j \in C^2\big([a,b]\big), \qquad j \in 1:n,
\end{aligned}
$$

для которых выполняются равенства

$$
\mathbf{f}_i(v_j) = \mathbf{g}_j(u_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{1}
$$

Ставится задача: построить поверхность $\mathbf{r} \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^s$, $\mathbf{r} \in C^2$, удовлетворяющую условиям

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(u_i, v) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in [c,d],\\
\mathbf{r}(u, v_j) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in [a,b].
\end{aligned} \tag{2}
$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Для того, чтобы решить поставленную задачу, воспользуемся обобщением поверхности Кунса, предложенным в [1].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \ldots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \ldots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : m. \tag{3}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n. \tag{4}$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \Big\{ \mathbf{g} \colon D_u \to \mathbb{R}^s \;\big|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^s(u)\big),\ g^k \in T_u \Big\},$$
$$\mathbf{T}_v = \Big\{ \mathbf{f} \colon D_v \to \mathbb{R}^s \;\big|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \ldots, f^s(v)\big),\ f^k \in T_v \Big\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \ldots, L_i^u(g^s)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^s(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ \ i \in 1 : m;$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \ldots, L_j^v(f^s)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \ldots, f^s(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1 : n.$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1 : m, \quad j \in 1 : n. \tag{5}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{r} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, \mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\, \mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\, H_j^v(v)\, \mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{6}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{r}(u, v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [1] доказано, что вектор-функция $\mathbf{r}(u, v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{r}(\cdot, v)) = \mathbf{f}_i(v), \qquad && i \in 1 : m, \qquad && v \in D_v, \\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{r}(u, \cdot)) = \mathbf{g}_j(u), \qquad && j \in 1 : n, \qquad && u \in D_u. \end{aligned} \tag{7}$$

3°. Покажем, что можно подобрать функционалы и смешивающие функции таким образом, чтобы обобщённая поверхность Кунса решала поставленную в первом разделе задачу.

Положим $D_u = [a,b]$, $D_v = [c,d]$, $T_u = C([a,b])$, $T_v = C([c,d])$. Функционалы L_i^u и L_j^v определим следующим образом:

$$\begin{aligned} L_i^u(g) &= g(u_i), \qquad i \in 1:m, \\ L_j^v(f) &= f(v_j), \qquad j \in 1:n. \end{aligned}$$

В этом случае условия (7) принимают вид (2). Равенства (3) сводятся к

$$H_j^u(u_i) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m. \tag{8}$$

Будем искать смешивающие функции H_j^u среди натуральных кубических сплайнов с узлами $u_1, \ldots, u_m$. Напомним, что натуральным кубическим сплайном называется функция класса C^2, совпадающая на отрезках $[u_k, u_{k+1}]$, $k \in 1 : m-1$, с некоторыми полиномами третьего порядка и линейная на интервалах $(-\infty, u_1)$, $(u_m, +\infty)$ (см. [2, с. 68]). Для каждого H_j^u условия (8) задают интерполяционную задачу, причём узлы интерполяции совпадают с узлами сплайна. Согласно [2], такая задача всегда имеет решение. Аналогичным образом, в качестве смешивающих функций H_i^v возьмём натуральные кубические сплайны с узлами $v_1, \ldots, v_n$, являющиеся решениями интерполяционных задач

$$H_i^v(v_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m.$$

Для заданных функционалов L_i^u и L_j^v условия согласования (5) примут вид (1). Поэтому если для вектор-функций $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$, $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ выполнены соотношения (1), то обобщённая поверхность Кунса (6) будет удовлетворять условиям (2). В данном случае формула (6) принимает вид

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, \mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\, \mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\, H_j^v(v)\, \mathbf{g}_j(u_i). \tag{9}$$

Ясно, что $\mathbf{r} \in C^2([a,b] \times [c,d])$.

ПРИМЕР. Пусть $n = m = 3$. На рис. 1 пунктирными линиями показаны кривые f_1, f_2 и f_3, сплошными линиями — кривые g_1, g_2 и g_3, кружками отмечены точки пересечения кривых. Поверхность Кунса, построенная по этим кривым, приведена на рис. 2. Отметим, что кривые f_1, f_3, g_1 и g_3 лежат в одной плоскости, а кривые f_2 и g_2 — в ортогональных плоскостях.

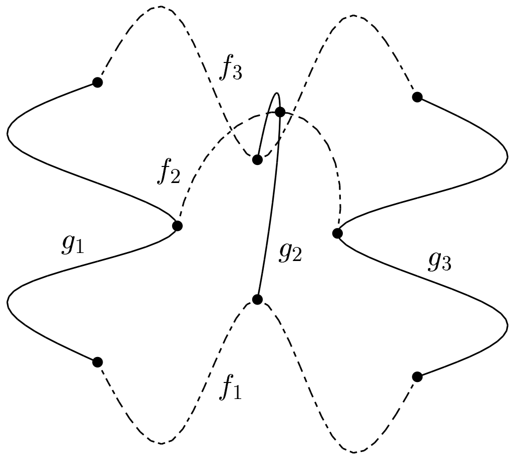

Рис. 1. Остовные кривые

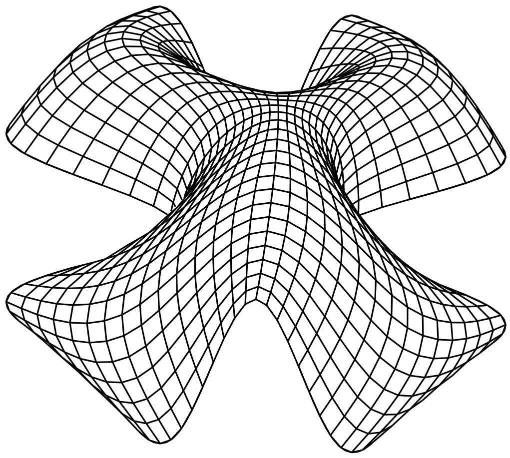

Рис. 2. Поверхность Кунса

4°. Пусть заданы наборы вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \in C^2\big([c,d]\big), \qquad \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \in C^2\big([a,b]\big),$$

удовлетворяющих условиям (1). Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \int_a^b \int_c^d \big\|\mathbf{r}_{uuvv}(u,v)\big\|^2 dv\, du \to \inf, \\ \mathbf{r}(u_i, v) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in [c,d], \\ \mathbf{r}(u, v_j) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in [a,b], \\ \mathbf{r} \in C^2\big([a,b]\times[c,d]\big), \quad \mathbf{r}_{uuvv}, \mathbf{r}_{vvuu} \in C\big([a,b]\times[c,d]\big), \\ \mathbf{r}_{uuvv}(u,v) \equiv \mathbf{r}_{vvuu}(u,v). \end{gathered} \tag{10}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Поверхность Кунса класса* C^2*, построенная по формуле* (9)*, является единственным решением задачи* (10)*.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, доказанной в [3]. Пусть

$$I_u\, g = \int_a^b g(u)\, du, \qquad I_v\, f = \int_c^d f(v)\, dv.$$

Положим $E_u = C^2\big([a,b]\big)$, $E_v = C^2\big([c,d]\big)$ и определим операторы A_u и A_v формулами

$$A_u\, g = g'', \qquad A_v\, f = f''.$$

Основное условие в теореме связано с экстремальными задачами для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v. В данном случае экстремальная задача для функции, заданной на множестве D_u, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \int_a^b \big[g''(u)\big]^2 du \to \inf, \\ g(u_i) = x_i, \quad i \in 1:m, \\ g \in C^2\big([a,b]\big). \end{gathered} \tag{11}$$

Согласно свойству минимальной нормы для натуральных сплайнов (см. [2, с. 73]), единственным решением задачи (11) является интерполяционный кубический сплайн, который может быть представлен в виде

$$g_*(u) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\, x_i.$$

Это в точности соответствует требуемому условию теоремы. Аналогичным образом проверяется условие, связанное с экстремальной задачей для функции, заданной на множестве D_v.

Положим

$$\begin{aligned} T_{uv} &= C\big([a,b] \times [c,d]\big), \\ E_{uv} &= \Big\{ e \in C^2\big([a,b] \times [c,d]\big) \;\big|\; e_{uuvv}, e_{vvuu} \in C\big([a,b] \times [c,d]\big),\ e_{uuvv} = e_{vvuu} \Big\}. \end{aligned}$$

Так же, как в [3], обозначим через $\mathbf{E}_{uv}$ пространство вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству E_{uv}. Проверим, что поверхность Кунса класса C^2, построенная по формуле (9), принадлежит пространству $\mathbf{E}_{uv}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uuvv}(u,v) = \sum_{i=1}^m \big(H_i^u(u)\big)''\, \mathbf{f}_i''(v) + \sum_{j=1}^n \big(H_j^v(v)\big)''\, \mathbf{g}_j''(u) - \\ - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \big(H_i^u(u)\big)''\, \big(H_j^v(v)\big)''\, g_j(u_i) = \mathbf{r}_{vvuu}(u,v). \end{aligned}$$

Так как в данном случае $A_{u,*} = \frac{d^2}{du^2}$, $A_{*,v} = \frac{d^2}{dv^2}$, то по построению пространства E_{uv} выполняется равенство

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, e = A_{*,v}\, A_{u,*}\, e, \qquad e \in E_{uv}.$$

Все оставшиеся условия, требуемые в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, являются элементарными свойствами интегралов и производных функций двух переменных. Применяя теорему, заключаем, что поверхность Кунса, построенная по формуле (9), является единственным решением задачи (10). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`).

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Полиномиальные сплайны.* Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 120 с.

3. Чашников Н. В. *Экстремальные свойства поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).