ДВОЙСТВЕННАЯ ЛИФТИНГОВАЯ СХЕМА*

В. Н. Малозёмов   Н. А. Селянинова

malv@gamma.math.spbu.ru   vinyo@mail.ru

14 марта 2006 г.

Прямая лифтинговая схема, основанная на дискретной сплайн-интерполяции по чётным индексам, рассматривалась в [1, 2]. В данном докладе изучается двойственная лифтинговая схема, в которой используется дискретная сплайн-интерполяция по нечётным индексам. Ярким и неожиданным фактом, связывающим эти схемы, является *биортогональность базисов* прямого и двойственного лифтингового разложения.

В идейном плане мы следуем работе [2].

Сохраняются обозначения из предыдущего доклада [1].

1. Предварительные сведения

1.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}_N$ при $N = 2N_1$. Возьмём сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ и разобъём его на две части

$$e(j) \,=\, x(2j)\,, \quad d(j) \,=\, x(2j+1)\,.$$

Легко проверяется, что спектры Фурье $X = \mathcal{F}_N(x)$, $E = \mathcal{F}_{N_1}(e)$, $D = \mathcal{F}_{N_1}(d)$ сигналов x, e, d связаны соотношениями: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} X(k) \,&=\, E(k) + \omega_N^{-k} D(k)\,, \\ X(k+N_1) \,&=\, E(k) - \omega_N^{-k} D(k)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Формулы (1.1) допускают обращение: при $k \in 0 : N_1 - 1$

$$\begin{aligned} E(k) \,&=\, \tfrac{1}{2}\big[X(k) + X(k+N_1)\big]\,, \\ D(k) \,&=\, \tfrac{1}{2}\big[X(k) - X(k+N_1)\big]\,\omega_N^{k}\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

1.2. Нам потребуются дискретные периодические сплайны вида

$$S(j) \;=\; \sum_{p=0}^{N_1-1} c(p)\, Q_r(j-2p-1)\,, \tag{1.3}$$

где

$$Q_r(j) \;=\; \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bigl(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} \omega_N^{kj}\,.$$

Аналогично [3, 4] показывается, что единственным решением интерполяционной задачи

$$S(2l+1) \;=\; d(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1-1\,,$$

является сплайн S_1 с вектором коэффициентов $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N_1-1})$, дискретное преобразование Фурье которого $C = \mathcal{F}_{N_1}(c)$ определяется формулой

$$C(k) \;=\; D(k)/T_r(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1-1\,, \tag{1.4}$$

где

$$T_r(k) \;=\; \tfrac{1}{2}\Bigl[\bigl(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} + \bigl(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r}\Bigr]\,.$$

Обозначим $\sigma_1(l) = S_1(2l)$ и найдём $\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1)$. Имеем

$$\sigma_1(l) \;=\; \sum_{p=0}^{N_1-1} c(p)\, Q_r(2(l-p)-1)$$

или $\sigma_1 = c * h_r$, где $h_r(l) = Q_r(2l-1)$. По теореме о свёртке

$$\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1) \;=\; \mathcal{F}_{N_1}(c)\, \mathcal{F}_{N_1}(h_r)\,. \tag{1.5}$$

Вычислим $\mathcal{F}_{N_1}(h_r)$. Поскольку

$$\bigl[\mathcal{F}_N(Q_r)\bigr](k) - \bigl[\mathcal{F}_N(Q_r)\bigr](k+N_1) \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j)\, \omega_N^{-kj}\, \bigl[1-(-1)^j\bigr] \;=$$
$$=\; 2\sum_{l=0}^{N_1-1} Q_r(2l+1)\, \omega_N^{-k(2l+1)} \;=\; 2\sum_{l=1}^{N_1} Q_r(2l-1)\, \omega_N^{-k(2l-1)} \;=$$
$$=\; 2\,\omega_N^{k} \sum_{l=0}^{N_1-1} h_r(l)\, \omega_{N_1}^{-kl} \;=\; 2\,\omega_N^{k}\bigl[\mathcal{F}_{N_1}(h_r)\bigr](k)\,,$$

то

$$\bigl[\mathcal{F}_{N_1}(h_r)\bigr](k) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\omega_N^{-k}\Bigl[\bigl(2\cos\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r} - \bigl(2\sin\tfrac{\pi k}{N}\bigr)^{2r}\Bigr]\,.$$

Обозначим

$$U_1(k) = \frac{\big(\cos\frac{\pi k}{N}\big)^{2r} - \big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{2r}}{\big(\cos\frac{\pi k}{N}\big)^{2r} + \big(\sin\frac{\pi k}{N}\big)^{2r}}\,.$$

На основании (1.4) и (1.5) получаем

$$\big[\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1)\big](k) \;=\; \omega_N^{-k}\, U_1(k) D(k)\,, \quad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{1.6}$$

1.3. Напомним определение прямого лифтингового преобразования [1, 2]. Считаем, что $N = 2^s$. Обозначим $N_\nu = N/2^\nu$,

$$U_\nu(k) = \frac{\big(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\big)^{2r} - \big(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\big)^{2r}}{\big(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\big)^{2r} + \big(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\big)^{2r}}\,, \;\; k \in 0 : N_{\nu-1} - 1\,, \;\; \nu \in 1 : s\,. \tag{1.7}$$

При каждом $\nu \in 1 : s$ введём два вспомогательных сигнала

$$\widetilde{g}_\nu(k) = \omega^k_{N_{\nu-1}}\big(1 - U_\nu(k)\big), \quad \widetilde{h}_\nu(k) = 1 + \beta_\nu(k)(1 - U_\nu(k)), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1\,. \tag{1.8}$$

Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k)\,, \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,.$$

Проведём вычисления по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{gathered}
E_0 \;=\; \mathcal{F}_N(x)\,; \\
D_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{g}_\nu(k) E_{\nu-1}(k) + \widetilde{g}_\nu(k + N_\nu) E_{\nu-1}(k + N_\nu)\right], \\
E_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{h}_\nu(k) E_{\nu-1}(k) + \widetilde{h}_\nu(k + N_\nu) E_{\nu-1}(k + N_\nu)\right], \\
k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu = 1, \ldots, s.
\end{gathered}$$

Набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ называется *прямым лифтинговым преобразованием* сигнала x.

Для обращения прямого лифтингового преобразования введём при каждом $\nu \in 1 : s$ ещё два вспомогательных сигнала

$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k), \quad g_\nu(k) = \omega^{-k}_{N_{\nu-1}}\big(1 - \beta_\nu(k)(1 + U_\nu(k))\big), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1. \tag{1.9}$$

Допустим, что известен набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$. Проведём вычисления по формулам

$$\begin{gathered}
E_{\nu-1}(k) \;=\; h_\nu(k) E_\nu(k) + g_\nu(k) D_\nu(k)\,, \\
E_{\nu-1}(k + N_\nu) \;=\; h_\nu(k + N_\nu) E_\nu(k) + g_\nu(k + N_\nu) D_\nu(k)\,, \\
k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.
\end{gathered}$$

При $\nu = 1$ получим спектр E_0, равный $\mathcal{F}_N(x)$.

1.4. Введём дальнейшие обозначения

$$H_\nu = h_1 h_2 \cdots h_\nu\,, \quad G_\nu = h_1 \cdots h_{\nu-1}\, g_\nu\,,$$
$$\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)\,, \quad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu)\,.$$

Как показано в [1, 2], при каждом $t \in 1:s$ система сигналов

$$\Big\{ \big\{ \varphi_t(j-2^t k) \big\}_{k=0}^{N_t-1};\ \big\{ \psi_\nu(j-2^\nu k) \big\}_{k=0}^{N_\nu-1},\ \nu = 1,\ldots,t \Big\} \tag{1.10}$$

образует базис в $\mathbb{C}_N$. Более того, для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо прямое лифтинговое разложение

$$x(j) \,=\, \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\, \varphi_t(j-2^t k) + \sum_{\nu=1}^{t} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j-2^\nu k)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,,$$

где $e_t = \mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$.

2. Двойственное лифтинговое преобразование

2.1. Сначала рассмотрим случай $N = 2N_1$. Возьмём сигнал $x \in \mathbb{C}_N$. Двойственное лифтинговое преобразование сигнала x осуществляется в три этапа.

Split. Переобозначим $e_0 := x$ и расщепим e_0 на два сигнала

$$\widetilde{e}_1(l) = e_0(2l)\,, \quad \widetilde{d}_1(l) = e_0(2l+1)\,, \quad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Вычислим $\widetilde{E}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{e}_1)$, $\widetilde{D}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{d}_1)$.

Predict. Предскажем значения $\widetilde{e}_1(l)$ с помощью интерполяционного сплайна $S_1(j)$ вида (1.3), определяемого условием

$$S_1(2l+1) \,=\, \widetilde{d}_1(l)\,, \qquad l \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Положим $\sigma_1(l) = S_1(2l)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Полусумма

$$e_1(l) = \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{e}_1(l) + \sigma_1(l)\big]\,,$$

вообще говоря, мало отличается от $\widetilde{e}_1(l)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Согласно (1.6)

$$\big[\mathcal{F}_{N_1}(\sigma_1)\big](k) \,=\, \omega_N^{-k}\, U_1(k) \widetilde{D}_1(k)\,,$$

так что

$$E_1(k) := \mathcal{F}_{N_1}(e_1) \,=\, \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{E}_1(k) + \omega_N^{-k}\, U_1(k) \widetilde{D}_1(k)\big]\,, \quad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{2.1}$$

Lifting. Обновим сигнал $\widetilde{d}_1$. Для этого введём сигнал d_1, спектр которого $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$ определим так:

$$D_1(k) \;=\; \widetilde{D}_1(k) - 2\,\alpha_1(k)\,\omega_N^k\,E_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,. \tag{2.2}$$

Здесь α_1 — произвольный N-периодический сигнал, удовлетворяющий условию

$$\alpha_1(k+N_1) \;=\; -\alpha_1(k)\,, \qquad k \in 0 : N_1 - 1\,.$$

Ясно, что правая часть (2.2) является N_1-периодическим сигналом.

Пара (D_1, E_1) называется *двойственным лифтинговым преобразованием сигнала x в спектральной форме.*

2.2. Теперь будем считать, что $N{=}2^s$. Обозначим $N_\nu{=}N/2^\nu$. В предыдущем пункте было описано двойственное лифтинговое преобразование $E_0 \to (D_1, E_1)$. Это преобразование можно продолжить:

$$E_1 \to (D_2, E_2)\,,\; E_2 \to (D_3, E_3)\,, \,\ldots\,,\; E_{s-1} \to (D_s, E_s)\,.$$

Выведем соответствующие формулы. Положим

$$\widetilde{p}_\nu(k) = \tfrac{1}{2}(1{+}U_\nu(k)),\; \widetilde{q}_\nu(k) = \omega^k_{N_{\nu-1}}\big(1{-}\alpha_\nu(k)(1{+}U_\nu(k))\big),\; k \in 0 : N_{\nu-1}{-}1. \tag{2.3}$$

Здесь $U_\nu(k)$ то же, что и в (1.7), а $\alpha_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\alpha_\nu(k+N_\nu) \;=\; -\alpha_\nu(k)\,, \qquad k \in 0 : N_\nu - 1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{gathered}
E_0 \;=\; \mathcal{F}_N(x)\,;\\
E_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{p}_\nu(k)E_{\nu-1}(k) + \widetilde{p}_\nu(k+N_\nu)E_{\nu-1}(k+N_\nu)\right],\\
D_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\left[\widetilde{q}_\nu(k)E_{\nu-1}(k) + \widetilde{q}_\nu(k+N_\nu)E_{\nu-1}(k+N_\nu)\right],\\
k \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad \nu \;=\; 1, \ldots, s.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Доказательство проводится так же, как в случае прямой лифтинговой схемы (со ссылкой на формулы (1.2), (2.1) и (2.2)).

Набор спектров $(D_1, D_2, \ldots, D_s, E_s)$ называется *полным двойственным лифтинговым преобразованием* сигнала x.

2.3. Для восстановления спектра E_0 исходного сигнала x по $(D_1,D_2,\ldots,D_s,E_s)$ введём при каждом $\nu\in 1:s$ два вспомогательных сигнала

$$p_\nu(k)=2\bigl(1+\alpha_\nu(k)(1-U_\nu(k))\bigr),\;\; q_\nu(k)=\omega_{N_{\nu-1}}^{-k}(1-U_\nu(k)),\;\; k\in 0:N_{\nu-1}-1. \quad (2.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Формулы (2.4) допускают обращение*

$$\begin{aligned} E_{\nu-1}(k) &= p_\nu(k)E_\nu(k)+q_\nu(k)D_\nu(k)\,,\\ E_{\nu-1}(k+N_\nu) &= p_\nu(k+N_\nu)E_\nu(k)+q_\nu(k+N_\nu)D_\nu(k)\,,\\ & k\in 0:N_\nu-1\,,\quad \nu=s,s-1,\ldots,1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $\nu=1$ получаем $E_0=\mathcal{F}_N(x)$.

Доказательство опирается на тождества

$$\begin{aligned} p_\nu(k)\,\widetilde{p}_\nu(k)+q_\nu(k)\,\widetilde{q}_\nu(k)&\equiv 2\,,\\ p_\nu(k)\,\widetilde{p}_\nu(k+N_\nu)+q_\nu(k)\,\widetilde{q}_\nu(k+N_\nu)&\equiv 0\,. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Справедливость равенств (2.6) проверяется справа налево. При этом используются формулы (2.4) и (2.7). □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\nu\in 1:s$ и $\alpha_\nu=\overline{\beta}_\nu$. Тогда при $k\in 0:N_{\nu-1}-1$*

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_\nu(k) &= \tfrac12\,h_\nu(k), & \widetilde{q}_\nu(k) &= \overline{g_\nu(k)},\\ \overline{p_\nu(k)} &= 2\,\widetilde{h}_\nu(k), & \overline{q_\nu(k)} &= \widetilde{g}_\nu(k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доказательство следует из определений (1.8), (1.9), (2.3) и (2.5).

3. Двойственные лифтинговые разложения сигнала

3.1. Введём обозначения

$$\widetilde{H}_\nu=\overline{\widetilde{h}}_1\overline{\widetilde{h}}_2\cdots\overline{\widetilde{h}}_\nu\,,\quad \widetilde{G}_\nu=\overline{\widetilde{h}}_1\cdots\overline{\widetilde{h}}_{\nu-1}\,\overline{\widetilde{g}}_\nu\,,$$
$$\widetilde{\varphi}_\nu=\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{H}_\nu)\,,\quad \widetilde{\psi}_\nu=\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{G}_\nu)\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $N=2^s$, $t\in 1:s$, $\alpha_\nu=\overline{\beta}_\nu$ при $\nu\in 1:t$. Для любого сигнала $x\in\mathbb{C}_N$ справедливо разложение*

$$x(j)=2^t\sum_{k=0}^{N_t-1}e_t(k)\,\widetilde{\varphi}_t(j-2^tk)+\sum_{\nu=1}^{t}2^{\nu-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1}d_\nu(k)\,\widetilde{\psi}_\nu(j-2^\nu k)\,,\quad j\in\mathbb{Z}\,, \quad (3.1)$$

где $e_t=\mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu=\mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$. Спектры E_t, D_ν вычисляются рекуррентно по формулам (2.4).

Доказательство. Перепишем (2.6) в виде

$$E_{\nu-1} = p_\nu E_\nu + q_\nu D_\nu\,, \qquad \nu = 1,\ldots,s.$$

По индукции проверяется, что

$$E_0 \;=\; p_1\,p_2\cdots p_t\,E_t + \sum_{\nu=1}^{t} p_1\cdots p_{\nu-1}\,q_\nu\,D_\nu\,.$$

Перепишем последнее равенство в терминах $\widetilde{h}_\nu$, $\widetilde{g}_\nu$. Согласно (2.8)

$$E_0 \;=\; 2^t\,\overline{\overline{h}}_1\,\overline{\overline{h}}_2\cdots\overline{\overline{h}}_t\,E_t + \sum_{\nu=1}^{t} 2^{\nu-1}\,\overline{\overline{h}}_1\cdots\overline{\overline{h}}_{\nu-1}\,\overline{\overline{g}}_\nu\,D_\nu\,.$$

Применив обратное ДПФ, получим

$$x \;=\; 2^t\mathcal{F}_N^{-1}\big(\widetilde{H}_t E_t\big) + \sum_{\nu=1}^{t} 2^{\nu-1}\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{G}_\nu D_\nu)\,. \tag{3.2}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{G}_\nu D_\nu)\big](j) \;&=\; \tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{G}_\nu(l)D_\nu(l)\,\omega_N^{lj} \;=\\ &=\; \tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{G}_\nu(l)\,\omega_N^{lj}\sum_{k=0}^{N_\nu-1}d_\nu(k)\,\omega_{N_\nu}^{-lk} \;=\\ =\; \sum_{k=0}^{N_\nu-1}d_\nu(k)\Big\{\tfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{G}_\nu(l)\,\omega_N^{l(j-2^\nu k)}\Big\} \;&=\; \sum_{k=0}^{N_\nu-1}d_\nu(k)\,\widetilde{\psi}_\nu(j-2^\nu k)\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогично показывается, что

$$\big[\mathcal{F}_N^{-1}(\widetilde{H}_t E_t)\big](j) \;=\; \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\,\widetilde{\varphi}_t(j-2^t k)\,. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), приходим к (3.1). □

Формула (3.1) называется *двойственным лифтинговым разложением* сигнала x.

3.2. Правая часть (3.1) при каждом $t \in 1:s$ содержит ровно N слагаемых (по размерности пространства $\mathbb{C}_N$). Поскольку разложение (3.1) справедливо для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$, то система сигналов

$$\Big\{ \big\{ \widetilde{\varphi}_t(j - 2^t k) \big\}_{k=0}^{N_t - 1} ; \; \big\{ \widetilde{\psi}_\nu(j - 2^\nu k) \big\}_{k=0}^{N_\nu - 1} , \; \nu = 1, \ldots, t \Big\} \tag{3.5}$$

необходимо является базисом в $\mathbb{C}_N$.

4. Биортогональность прямого и двойственного базисов

Оказывается, что базис (3.5) двойственного лифтингового разложения биортогонален базису (1.10) прямого лифтингового разложения при каждом $t \in 1:s$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *При любом $\nu \in 1\!:\!s$ и любых целых l, m выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu l), \, \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle \; &= \; \delta_{N_\nu}(m - l) \, , \\ \langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu l), \, \widetilde{\psi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle \; &= \; 0 \, , \\ \langle \psi_\nu(\cdot - 2^\nu l), \, \widetilde{\psi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle \; &= \; \delta_{N_\nu}(m - l) \, , \\ \langle \psi_\nu(\cdot - 2^\nu l), \, \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle \; &= \; 0 \, . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введём обозначение $\lambda_{lm} = \langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu l), \, \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle$. Поскольку

$$\begin{aligned} \big[\mathcal{F}_N \big(\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu l) \big) \big](k) \; &= \; \omega_{N_\nu}^{-lk} \, H_\nu(k) \, , \\ \big[\mathcal{F}_N \big(\widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \big) \big](k) \; &= \; \omega_{N_\nu}^{-mk} \, \widetilde{H}_\nu(k) \, , \end{aligned}$$

то по обобщённому равенству Парсеваля

$$\lambda_{lm} \; = \; \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} H_\nu(k) \, \overline{\widetilde{H}_\nu(k)} \; =$$

$$= \; \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} h_1(k) \widetilde{h}_1(k) \cdots h_\nu(k) \widetilde{h}_\nu(k) \, .$$

Отметим, что

$$h_\mu(k) \, \widetilde{h}_\mu(k) \; = \; 1 + U_\mu(k) + \beta_\mu(k)(1 - U_\mu^2(k)) \, .$$

Обозначим $\zeta_\mu(k) = U_\mu(k) + \beta_\mu(k)(1 - U_\mu^2(k))$. Очевидно, что ζ_μ — $N_{\mu-1}$-периодический сигнал, обладающий свойством

$$\zeta_\mu(k + N_\mu) \; = \; -\zeta_\mu(k), \qquad k \in 0 : N_\mu - 1.$$

В принятых обозначениях

$$\lambda_{lm} \,=\, \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} (1+\zeta_1(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k))\,.$$

Выражение $(1+\zeta_2(k))\cdots(1+\zeta_\nu(k))$ имеет период N_1, поэтому

$$\lambda_{lm} \,=\, \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_1-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} \big[1+\zeta_1(k)+1+\zeta_1(k+N_1)\big] (1+\zeta_2(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k)) \,=$$

$$=\, \tfrac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} (1+\zeta_2(k)) \cdots (1+\zeta_\nu(k))\,.$$

Повторив этот приём ν раз, получим

$$\lambda_{lm} \,=\, \tfrac{1}{N_\nu} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} \omega_{N_\nu}^{(m-l)k} \,=\, \delta_{N_\nu}(m-l).$$

Остальные соотношения в (4.1) проверяются аналогично. При доказательстве третьего соотношения используется равенство

$$g_\nu(k)\, \widetilde{g}_\nu(k) \,=\, 1-\zeta_\nu(k)\,.$$

Вывод второго и четвёртого соотношений основан на формулах

$$h_\nu(k)\, \widetilde{g}_\nu(k) \,=\, \omega_{N_{\nu-1}}^{k} (1-U_\nu^2(k))\,,$$

$$g_\nu(k)\, \widetilde{h}_\nu(k) \,=\, \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} \big[1-\beta_\nu(k)(1+U_\nu(k))\big] \big[1+\beta_\nu(k)(1-U_\nu(k))\big]\,,$$

в силу которых

$$h_\nu(k+N_\nu)\, \widetilde{g}_\nu(k+N_\nu) \,=\, -\, h_\nu(k)\, \widetilde{g}_\nu(k)\,,$$

$$g_\nu(k+N_\nu)\, \widetilde{h}_\nu(k+N_\nu) \,=\, -\, g_\nu(k)\, \widetilde{h}_\nu(k)\,.$$

Предложение доказано. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Селянинова Н. А. *Прямая лифтинговая схема* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 26 апреля 2005 г.

2. Жёлудев В. А., Певный А. Б. *Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 537–548.

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Части 1–3. СПб.: НИИММ, 2003. 288 с.