О СПЕКТРЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ УОЛША*

В. Н. Малозёмов

malv@gamma.math.spbu.ru

23 июня 2004 г.

1°. Пусть $N = 2^s$. Для чисел $k, j \in 0 : N-1$ с двоичными кодами $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_2$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2$ положим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha j_\alpha \,.$$

Дискретные функции Уолша v_k определяются формулой

$$v_k(j) = (-1)^{\{k,j\}_s}\,, \qquad k, j \in 0 : N-1\,.$$

Спектром Фурье функции v_k называется функция V_k со значениями

$$V_k(j) = \sum_{l=0}^{N-1} v_k(l)\, \omega_N^{-lj}\,, \qquad j \in 0 : N-1\,,$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Займёмся вычислением спектров V_k.

2°. Очевидно, что $v_0(j) \equiv 1$; $v_1(j) = (-1)^{j_0} = (-1)^j$, $j \in 0 : N-1$. Спектры Фурье этих функций вычисляются легко:

$$V_0(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{-lj} = N\,\delta_N(j)\,,$$

$$V_1(j) = \sum_{l=0}^{N-1} (-1)^l\, \omega_N^{-lj} = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_2^l\, \omega_N^{-lj} = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{-l(j-N/2)} = N\,\delta_N(j - N/2)\,.$$

Отметим, что $V_1(j) = V_0(j - N/2)$.

Обозначим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$ и введём функции Радемахера r_ν:

$$r_\nu(j) = v_{N_\nu}(j)\,, \qquad \nu \in 1 : s\,.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

ТЕОРЕМА 1. *Для спектра Фурье R_ν функции Радемахера r_ν справедливо представление*

$$R_\nu(j) = \begin{cases} 2^\nu \left(1 - i \operatorname{ctg} \dfrac{(2p+1)\,\pi}{N_{\nu-1}}\right) & \text{при } j = (2p+1)\,\Delta_\nu,\ p \in 0 : N_\nu - 1; \\ 0 \quad \text{при остальных } j \in 0 : N-1. \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что

$$r_\nu(j) = (-1)^{j_{s-\nu}} = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}, \qquad j \in 0 : N-1\,.$$

Запишем

$$R_\nu(j) = \sum_{l=0}^{N-1} (-1)^{\lfloor l/N_\nu \rfloor}\, \omega_N^{-lj}\,.$$

Положим $l = k\,N_\nu + q$, $q \in 0 : N_\nu - 1$, $k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. Тогда $\lfloor l/N_\nu \rfloor = k$ и

$$R_\nu(j) = \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^k \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-(k\,N_\nu+q)\,j} = \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^k\, \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-kj} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-qj} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-k\,(j-\Delta_\nu)} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-qj} = 2^\nu\, \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j - \Delta_\nu) \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-qj}\,.$$

Ясно, что функция $R_\nu(j)$ отлична от нуля только при $j = \Delta_\nu + p\,\Delta_{\nu+1} = (2p+ + 1)\,\Delta_\nu$, $p \in 0 : N_\nu - 1$. При указанных j имеем

$$R_\nu(j) = 2^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-q\,(2p+1)\,\Delta_\nu} = 2^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_{N_{\nu-1}}^{-q\,(2p+1)} =$$
$$= 2^\nu\, \frac{1 - \omega_{N_{\nu-1}}^{-N_\nu\,(2p+1)}}{1 - \omega_{N_{\nu-1}}^{-(2p+1)}} = 2^\nu \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{(2p+1)\,\pi}{N_{\nu-1}}\right).$$

Теорема доказана. □

Формулу (1) можно переписать в виде

$$V_{N_\nu}(j) = \begin{cases} 2^\nu \left(1 - i \operatorname{ctg} \dfrac{\pi j}{N}\right) & \text{при } j = (2p+1)\,\Delta_\nu,\ p \in 0 : N_\nu - 1; \\ 0 \quad \text{при остальных } j \in 0 : N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что спектр $V_{N_\nu}(j)$ имеет ровно N_ν ненулевых компонент.

3°. Вычислим V_2 и V_3. Поскольку $V_2 = V_{N_{s-1}}$, то $V_2(j)$ имеет только два ненулевых значения при $j = N/4$ и $j = 3N/4$. При этом согласно (2)

$$V_2(N/4) = N_1\Bigl(1 - i\ \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}\Bigr) = N_1\,(1 - i)\,,$$
$$V_2(3N/4) = N_1\Bigl(1 - i\ \mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4}\Bigr) = N_1\,(1 + i)\,.$$

Функция Уолша $v_3(j)$ допускает представление

$$v_3(j) = (-1)^{j_1 + j_0} = (-1)^{\lfloor j/2\rfloor + j}\,, \qquad j \in 0 : N-1\,,$$

так что

$$V_3(j) = \sum_{l=0}^{N-1} (-1)^{\lfloor l/2\rfloor + l}\,\omega_N^{-lj}\,.$$

Положим $l = 2k + q$, $q \in 0:1$, $k \in 0 : N_1 - 1$. Тогда $\lfloor l/2\rfloor + l = 3k + q$ и

$$V_3(j) = \sum_{q=0}^{1} (-1)^q \sum_{k=0}^{N_1-1} (-1)^k\,\omega_N^{-(2k+q)\,j} = \sum_{q=0}^{1} (-1)^q\,\omega_N^{-qj} \sum_{k=0}^{N_1-1} (-1)^k\,\omega_{N_1}^{-kj} =$$
$$= N_1\,\bigl(1 - \omega_N^{-j}\bigr)\,\delta_{N_1}(j - N_2)\,.$$

Ясно, что функция $V_3(j)$ отлична от нуля только при $j = N_2 = N/4$ и $j = N_2 + {}$ ${} + N_1 = 3N/4$. При этом

$$V_3(N/4) = N_1\bigl(1 - \omega_4^{-1}\bigr) = N_1\,(1 + i)\,,$$
$$V_3(3N/4) = N_1\bigl(1 - \omega_4^{-3}\bigr) = N_1\,(1 - i)\,.$$

Отметим, что $V_3(j) = V_2(j - N_1)$. Имеется в виду, что как функции Уолша $v_k(j)$, так и их спектры $V_k(j)$ продолжены с периодом N на все $j \in \mathbb{Z}$.

4°. Как известно,

$$v_k(j)\,v_{k'}(j) = v_{k\oplus k'}(j)\,, \qquad j \in 0 : N-1\,, \tag{3}$$

где символ $\oplus$ обозначает поразрядное сложение двоичных кодов по модулю два. Поскольку $2k + 1 = 2k \oplus 1$, то

$$v_{2k+1}(j) = v_{2k}(j)\,v_1(j)\,, \qquad j \in 0 : N-1\,. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива формула*

$$V_{2k+1}(j) = V_{2k}(j - N_1)\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$\mathcal{F}_N(x\,y) = N^{-1}(X * Y)\,.$$

Согласно (4), $V_{2k+1} = N^{-1}(V_{2k} * V_1)$. Так как $V_1(j) = N\,\delta_N(j - N_1)$, то

$$V_{2k+1}(j) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} V_{2k}(l)\,V_1(j-l) = \sum_{l=0}^{N-1} V_{2k}(l)\,\delta_N\big((j-N_1)-l\big) = V_{2k}(j-N_1)\,.$$

Теорема доказана. □

5°. Функции Уолша с основным периодом $0:N_1-1$ будем обозначать $v_k^{(1)}$. Таким образом,

$$v_k^{(1)}(j) = (-1)^{\{k,j\}_{s-1}}\,, \qquad k,j \in 0:N_1-1\,.$$

Выведем рекуррентное соотношение, связывающее спектры V_k и $V_k^{(1)}$.

ЛЕММА. *При $k,j\in 0:N_1-1$ справедливы формулы*

$$\begin{aligned} v_k(j) &= v_k^{(1)}(j)\,, & v_k(N_1+j) &= v_k^{(1)}(j)\,, \\ v_{N_1+k}(j) &= v_k^{(1)}(j)\,, & v_{N_1+k}(N_1+j) &= -v_k^{(1)}(j)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Для доказательства нужно вспомнить, что числа $v_k(0), v_k(1), \ldots, v_k(N-1)$ образуют строку матрицы Адамара A_s с индексом k и воспользоваться рекуррентным соотношением [1, с. 54]

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{s-1} & A_{s-1} \\ A_{s-1} & -A_{s-1} \end{bmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 3. *При $k,p\in 0:N_1-1$ справедливы формулы*

$$V_k(2p) = 2\,V_k^{(1)}(p)\,, \qquad V_k(2p+1) = 0\,, \tag{6}$$

$$V_{N_1+k}(2p) = 0\,, \qquad V_{N_1+k}(2p+1) = \frac{1}{N_1}\sum_{j=0}^{N_1-1} V_k^{(1)}(j)\,h(p-j)\,, \tag{7}$$

где

$$h(j) = 2\left(1 - i\,\operatorname{ctg}\frac{\pi\,(2j+1)}{N}\right).$$

Доказательство. При $k \in 0 : N_1 - 1$ согласно (5) имеем

$$V_k(j) = \sum_{l=0}^{N_1-1} v_k(l)\,\omega_N^{-lj} + \sum_{l=N_1}^{N-1} v_k(l)\,\omega_N^{-lj} = \sum_{l=0}^{N_1-1} v_k^{(1)}(l)\,\omega_N^{-lj} + \\ + \sum_{l=0}^{N_1-1} v_k^{(1)}(l)\,\omega_N^{-(N_1+l)\,j} = \bigl(1+(-1)^j\bigr) \sum_{l=0}^{N_1-1} v_k^{(1)}(l)\,\omega_N^{-lj}\,.$$

Отсюда непосредственно следует (6).

Теперь рассмотрим функции Уолша v_{N_1+k} при $k \in 0 : N_1 - 1$. Так как $N_1 + k = N_1 \oplus k$, то согласно (3)

$$V_{N_1+k} = N^{-1}(V_k * V_{N_1})\,. \tag{8}$$

При этом в силу (2)

$$V_{N_1}(j) = \begin{cases} 2\Bigl(1 - i\,\operatorname{ctg}\dfrac{\pi j}{N}\Bigr) & \text{при нечётных } j, \\ 0 \quad \text{при чётных } j. \end{cases}$$

Распишем формулу (8) подробнее:

$$V_{N_1+k}(2p) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N_1-1} V_k(2l+1)\,V_{N_1}\bigl(2(p-l)-1\bigr) + \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N_1-1} V_k(2l)\,V_{N_1}\bigl(2(p-l)\bigr)\,. \tag{9}$$

Обе суммы в правой части этого соотношения равны нулю. Первая — за счёт $V_k(2l+1)$, вторая — за счёт $V_{N_1}\bigl(2(p-l)\bigr)$. Таким образом, $V_{N_1+k}(2p) = 0$ при $p \in 0 : N_1 - 1$. Далее, аналогично (9) с использованием (6) получаем

$$V_{N_1+k}(2p+1) = \frac{1}{N_1}\sum_{l=0}^{N_1-1} V_k^{(1)}(l)\,V_{N_1}\bigl(2(p-l)+1\bigr)\,.$$

Остаётся учесть, что $V_{N_1}(2j+1) = h(j)$. Формула (7), а вместе с ней и теорема доказаны. □

6°. Приведём ещё один результат общего характера.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $N \geqslant 8$ *и* $k \in 0 : N_2 - 1$. *Тогда*

$$V_{3N_2+k}(j) = i^j\,V_{N_1+k}(j)\,, \qquad j \in 0 : N - 1\,.$$

Доказательство. Зафиксируем $k = (k_{s-3}, \dots, k_0)_2$ и запишем

$$\begin{aligned} 3N_2 + k = N_1 + N_2 + k &= (1, 1, k_{s-3}, \dots, k_0)_2 \,, \\ N_1 + k &= (1, 0, k_{s-3}, \dots, k_0)_2 \,. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$v_{3N_2+k}(j) = v_{N_1+k}\big(\langle j + N_2 \rangle_N\big) \,, \qquad j \in 0 : N-1 \,. \tag{10}$$

Возьмём $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$. Если $j_{s-2} = 0$, т. е. $j = (j_{s-1}, 0, j_{s-3}, \dots, j_0)_2$, то $\langle j + N_2 \rangle_N = (j_{s-1}, 1, j_{s-3}, \dots, j_0)_2$. Получаем

$$\{3N_2 + k, j\}_s = \big\{N_1 + k, \langle j + N_2 \rangle_N\big\}_s = j_{s-1} + \sum_{\alpha=0}^{s-3} k_\alpha \, j_\alpha \,.$$

Это гарантирует справедливость (10).

Пусть $j_{s-2} = 1$, т. е. $j = (j_{s-1}, 1, j_{s-3}, \dots, j_0)_2$. Тогда

$$\langle j + N_2 \rangle_N = \big(\langle j_{s-1} + 1 \rangle_2, 0, j_{s-3}, \dots, j_0\big)_2 \,.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \{3N_2 + k, j\}_s &= j_{s-1} + 1 + \sum_{\alpha=0}^{s-3} k_\alpha \, j_\alpha \,, \\ \big\{N_1 + k, \langle j + N_2 \rangle_N\big\}_s &= \langle j_{s-1} + 1 \rangle_2 + \sum_{\alpha=0}^{s-3} k_\alpha \, j_\alpha \,. \end{aligned}$$

Поскольку

$$(-1)^{\langle j_{s-1}+1 \rangle_2} = (-1)^{j_{s-1}+1} \,,$$

то и в этом случае выполняется равенство (10).

Обратимся к спектрам Фурье. В силу N-периодичности функций Уолша и (10) получим

$$\begin{aligned} V_{3N_2+k}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} v_{N_1+k}(l + N_2) \, \omega_N^{-lj} = \sum_{l=0}^{N-1} v_{N_1+k}(l) \, \omega_N^{-(l-N_2)\,j} = \\ = \omega_4^j \, V_{N_1+k}(j) = i^j \, V_{N_1+k}(j) \,. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Дальнейшие сведения о спектре Фурье функций Уолша имеются в [2–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть вторая. СПб.: НИИММ, 2003. 100 с.

2. Львович А. А., Кузьмин Б. Д. *Аналитическое выражение для спектров функций Уолша* // Радиотехника. 1980. Т. 35. № 1. С. 33–39.

3. Зеленков А. В. *Быстрое преобразование спектра сигнала из базиса Уолша в базис дискретных экспоненциальных функций* // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 27. № 3. С. 552–565.

4. Пойда В. Н. *Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах.* Минск: Наука и техника, 1978. 136 с.