ПРЕДЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

5 декабря 2009 г.

В [1] было показано, как строить дискретную поверхность Кунса, натянутую на сеть из остовных кривых. Остовные кривые при этом задавались вектор-функциями целочисленного аргумента. Теперь рассмотрим случай, когда сеть кривых задаётся вектор-функциями непрерывного аргумента, а остовные кривые для поверхности Кунса определяются при помощи дискретизации. Целью данного доклада является нахождение предела дискретных поверхностей Кунса при шаге дискретизации, стремящемся к нулю, и установление свойства минимальной нормы для предельной поверхности.

1°. Пусть m_1, m_2 — натуральные числа, отличные от единицы, и задан набор непрерывных m_2-периодических d-мерных вектор-функций $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1}$ и набор непрерывных m_1-периодических d-мерных вектор-функций $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \ldots \ldots, \mathbf{g}_{m_2-1}$. Предположим, что выполняются равенства

$$\mathbf{f}_i(j) = \mathbf{g}_j(i), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{1}$$

Для натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, проведём дискретизацию вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$:

$$\mathbf{f}_{i,n_2}(v) := \mathbf{f}_i\big(\tfrac{v}{n_2}\big), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z};$$
$$\mathbf{g}_{j,n_1}(u) := \mathbf{g}_j\big(\tfrac{u}{n_1}\big), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}.$$

Из (1) следует, что

$$\mathbf{f}_{i,n_2}(jn_2) = \mathbf{g}_{j,n_1}(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Положим $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$. Ясно, что вектор-функции $\mathbf{f}_{i,n_2}$ периодические с периодом N_2, а вектор-функции $\mathbf{g}_{j,n_1}$ периодические с периодом N_2. Напомним метод построения дискретной поверхности Кунса по этим функциям, приведённый в [1].

Пусть r_1, r_2 — натуральные числа. Определим H^u_{0,n_1} как дискретный N_1-периодический сплайн порядка r_1, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$H^u_{0,n_1}(kn_1) = \delta_{m_1}(k), \qquad k \in 0 : m_1 - 1,$$

а H^v_{0,n_2} — как дискретный N_2-периодический сплайн порядка r_2, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$H^v_{0,n_2}(kn_2) = \delta_{m_2}(k), \qquad k \in 0 : m_2 - 1.$$

Смешивающие функции определим формулами

$$\begin{aligned} H^u_{i,n_1}(u) &= H^u_{0,n_1}(u - in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ H^v_{j,n_2}(v) &= H^v_{0,n_2}(v - jn_2), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Все функции H^u_{i,n_1} являются дискретными периодическими сплайнами порядка r_1, а все функции H^v_{j,n_2} — дискретными периодическими сплайнами порядка r_2.

Дискретная поверхность Кунса определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H^u_{i,n_1}(u)\, \mathbf{f}_{i,n_2}(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H^v_{j,n_2}(v)\, \mathbf{g}_{j,n_1}(u) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H^u_{i,n_1}(u)\, H^v_{j,n_2}(v)\, \mathbf{g}_{j,n_1}(in_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Так как для остовных функций выполнено условие согласования (2), то вектор-функция $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}_{n_1,n_2}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть фиксированы числа m_1, m_2, r_1, r_2 и остовные вектор-функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$. Для каждой пары натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, значения вектор-функции $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v)$ образуют множество из $N_1 N_2$ точек в пространстве $\mathbb{R}^d$. Покажем, как найти предел этого множества при неограниченном возрастании n_1 и n_2.

2°. Воспользуемся предельным соотношением для дискретных периодических сплайнов, полученным в [2]. Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B-сплайн первого порядка как m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_{m,1}(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{при } t \in [0,1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t-m+1, & \text{при } t \in (m-1, m]. \end{cases} \tag{5}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_{m,\nu}(t) = \int_0^m P_{m,\nu-1}(s)\, P_{m,1}(t-s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \dots . \tag{6}$$

В [2] показано, что для дискретных интерполяционных сплайнов порядка r существует предельный сплайн, представимый в виде линейной комбинации сдвигов B-сплайнов $P_{m,r}$. Значит, найдётся сплайн

$$S_1(t) = \sum_{l=0}^{m_1-1} c_{1,l}\, P_{m_1,r_1}(t-l),$$

такой, что

$$\Big| H^u_{0,n_1}(u) - S_1\big(\tfrac{u}{n_1}\big) \Big| \xrightarrow[n_1\to\infty]{} 0 \qquad \text{равномерно по } u. \tag{7}$$

Аналогично, найдётся сплайн

$$S_2(t) = \sum_{l=0}^{m_2-1} c_{2,l}\, P_{m_2,r_2}(t-l),$$

такой, что

$$\Big| H^v_{0,n_2}(v) - S_2\big(\tfrac{v}{n_2}\big) \Big| \xrightarrow[n_2\to\infty]{} 0 \qquad \text{равномерно по } v.$$

В [2] доказано, что $P_{m,r} \in C^{2r-2}$. Поэтому $S_1 \in C^{2r_1-2}$, $S_2 \in C^{2r_2-2}$.

ЛЕММА. *Справедливы предельные соотношения*

$$H^u_{0,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1\to\infty]{} S_1(x) \qquad \textit{равномерно по } x \in \mathbb{R},$$
$$H^v_{0,n_2}\big(\lfloor y n_2 \rfloor\big) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} S_2(y) \qquad \textit{равномерно по } y \in \mathbb{R}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое соотношение. Так как функция S_1 непрерывна, то она равномерно непрерывна на любом отрезке. Из периодичности следует, что она равномерно непрерывна и на всей вещественной оси.

Для $x \in \mathbb{R}$ положим $u = \lfloor x n_1 \rfloor$. Имеем

$$\left\| H^u_{0,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big) - S_1(x) \right\| \leqslant \left\| H^u_{0,n_1}(u) - S_1\big(\tfrac{u}{n_1}\big) \right\| + \left\| S_1\big(\tfrac{u}{n_1}\big) - S_1(x) \right\|.$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю равномерно по u в силу (7). Второе слагаемое также стремится к нулю равномерно по x в силу того, что S_1 равномерно непрерывна и выполняется неравенство

$$\left| \frac{u}{n_1} - x \right| = \left| \frac{\lfloor x n_1 \rfloor - x n_1}{n_1} \right| \leqslant \frac{1}{n_1}\,.$$

Второе предельное соотношение доказывается аналогичным образом. $\square$

Определим вектор-функцию $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^d$ формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(x,y) := \sum_{i=0}^{m_1-1} S_1(x-i)\,\mathbf{f}_i(y) + \sum_{j=0}^{m_2-1} S_2(y-j)\,\mathbf{g}_j(x) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} S_1(x-i)\,S_2(y-j)\,\mathbf{g}_j(i). \end{aligned} \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor x n_1 \rfloor, \lfloor y n_2 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{} \mathbf{c}(x,y) \qquad \textit{равномерно по } x, y \in \mathbb{R}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor x n_1 \rfloor, \lfloor y n_2 \rfloor\big) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H^u_{i,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big)\,\mathbf{f}_{i,n_2}\big(\lfloor y n_2 \rfloor\big) + \\ + \sum_{j=0}^{m_2-1} H^v_{j,n_2}\big(\lfloor y n_2 \rfloor\big)\,\mathbf{g}_{j,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H^u_{i,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big) H^v_{j,n_2}\big(\lfloor y n_2 \rfloor\big)\,\mathbf{g}_{j,n_1}(i n_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим слагаемые выражения (9) по отдельности. Используя лемму, получаем

$$H^u_{i,n_1}\big(\lfloor x n_1 \rfloor\big) = H^u_{0,n_1}\big(\lfloor (x-i) n_1 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1\to\infty]{} S_1(x-i),$$
$$H^v_{j,n_2}\big(\lfloor y n_2 \rfloor\big) = H^v_{0,n_2}\big(\lfloor (y-j) n_2 \rfloor\big) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} S_2(y-j).$$

Вектор-функции $\mathbf{f}_i$ непрерывны и периодичны, поэтому они равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\lfloor yn_2\rfloor}{n_2} - y\right| < \frac{1}{n_2}\,.$$

Следовательно,

$$\left\|\mathbf{f}_i\bigl(\tfrac{\lfloor yn_2\rfloor}{n_2}\bigr) - \mathbf{f}_i(y)\right\| \xrightarrow[n_2\to\infty]{} 0 \qquad \text{равномерно по } y.$$

Значит, имеет место предельное соотношение

$$\mathbf{f}_{i,n_2}\bigl(\lfloor yn_2\rfloor\bigr) = \mathbf{f}_i\bigl(\tfrac{\lfloor yn_2\rfloor}{n_2}\bigr) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} \mathbf{f}_i(y) \qquad \text{равномерно по } y.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathbf{g}_{j,n_1}\bigl(\lfloor xn_1\rfloor\bigr) \xrightarrow[n_1\to\infty]{} \mathbf{g}_j(x) \qquad \text{равномерно по } x.$$

Заметим, что $\mathbf{g}_{j,n_1}(in_1) = \mathbf{g}_j(i)$. Таким образом, все слагаемые выражения (9) сходятся к соответствующим слагаемым правой части (8).

Теорема доказана. □

ПРИМЕР. Пусть $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $r_1 = r_2 = 2$. В качестве остовных кривых возьмём кривые, которые использовались в [4] для построения поверхности в виде завязанной в узел трубки. На рис. 1 синим цветом изображены кривые $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{f}_1$, зелёным цветом — кривые $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, а кружками выделены точки пересечений. На рис. 2 приведена дискретная поверхность Кунса для значений $n_1 = 4$ и $n_2 = 25$, а на рис. 3 — для значений $n_1 = 6$, $n_2 = 50$, при этом синим цветом выделены остовные кривые $\mathbf{f}_{i,n_2}$, а зелёным — кривые $\mathbf{g}_{j,n_1}$. Предельная поверхность представлена на рис. 4.

3°. Покажем, что предельная поверность (8) является частным случаем обобщённой поверхности Кунса. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, приведённое в [3].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \ldots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \ldots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:m. \tag{10}$$

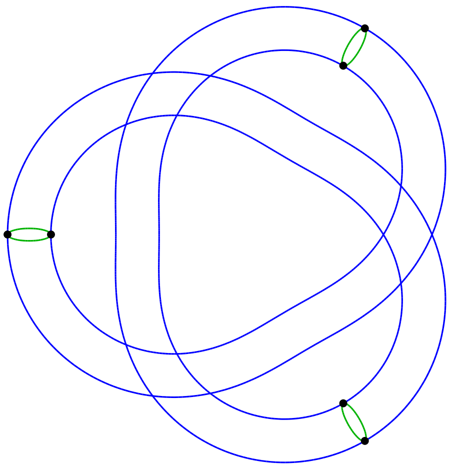

Рис. 1. Остовные кривые

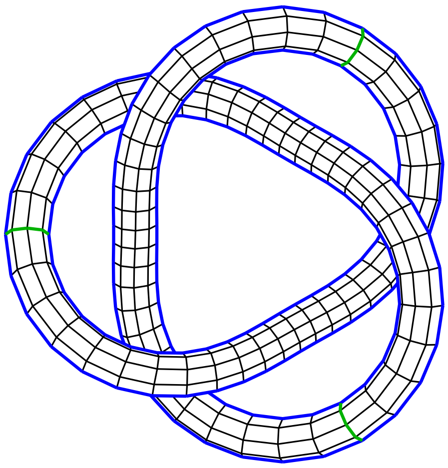

Рис. 2. Дискретная поверхность при $n_1 = 4$ и $n_2 = 25$

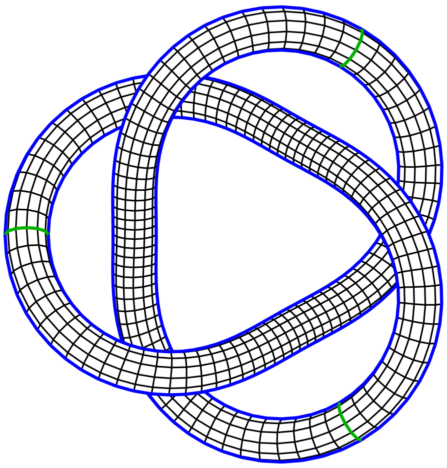

Рис. 3. Дискретная поверхность при $n_1 = 6$ и $n_2 = 50$

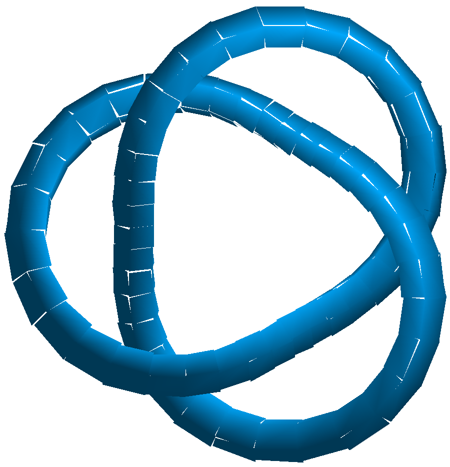

Рис. 4. Предельная поверхность

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n. \tag{11}$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \Big\{\mathbf{g}\colon D_u \to \mathbb{R}^d \;\Big|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^d(u)\big),\ g^k \in T_u\Big\},$$
$$\mathbf{T}_v = \Big\{\mathbf{f}\colon D_v \to \mathbb{R}^d \;\Big|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \ldots, f^d(v)\big),\ f^k \in T_v\Big\}.$$

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \ldots, L_i^u(g^d)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^d(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1:m;$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \ldots, L_j^v(f^d)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \ldots, f^d(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1:n.$$

Пусть заданы наборы остовных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{12}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{a} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{a}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, \mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\, \mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\, H_j^v(v)\, \mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{13}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{a}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса.* В [3] доказано, что вектор-функция $\mathbf{a}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{a}(\cdot, v)) = \mathbf{f}_i(v), && i \in 1:m, && v \in D_v,\\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{a}(u, \cdot)) = \mathbf{g}_j(u), && j \in 1:n, && u \in D_u. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $D_u = D_v = \mathbb{R}$, T_u — множество непрерывных m_1-периодических функций, T_v — множество непрерывных m_2-периодических функций. Положим

$$L_i^u(g) = g(i), \qquad i \in 0:m_1-1,$$
$$L_j^v(f) = f(j), \qquad j \in 0:m_2-1.$$

В качестве смешивающих функций возьмём сдвиги сплайнов S_1 и S_2:

$$H_i^u(u) = S_1(u-i), \qquad i \in 0:m_1-1, \quad u \in \mathbb{R};$$
$$H_j^v(v) = S_2(v-j), \qquad j \in 0:m_2-1, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Условия (10) и (11) в этом случае сводятся к равенствам

$$\begin{aligned} S_1(i-j) &= \delta_{ij}, \qquad i,j \in 0:m_1-1, \\ S_2(i-j) &= \delta_{ij}, \qquad i,j \in 0:m_2-1, \end{aligned}$$

которые, очевидно, выполняются. Условия согласования (12) совпадают с равенствами (1), а формула обобщённой поверхности Кунса (13) принимает вид (8). Таким образом, предельная поверхность действительно является частным случаем обобщённой поверхности Кунса. Следовательно, справедливы равенства (14), которые в данном частном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(i,v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0:m_1-1, \quad v \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{c}(u,j) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0:m_2-1, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Значит, предельная поверхность Кунса проходит через все кривые $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$.

4°. Покажем, что теорема об экстремальном свойстве обощённой поверхности Кунса, доказанная в [5], может быть применена для предельной поверхности.

Пусть порядки r_1 и r_2 отличны от единицы и остовные вектор-функции достаточно гладкие:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &\in C^{r_2}, \qquad i \in 0:m_1-1, \\ \mathbf{g}_j &\in C^{r_1}, \qquad j \in 0:m_2-1. \end{aligned}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \int_0^{m_1}\!\!\int_0^{m_2} \Big\| \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a}(x,y)\Big\|^2 dy\,dx \to \inf, \\ \mathbf{a}(i,y) = \mathbf{f}_i(y), \qquad i \in 0:m_1-1, \qquad y \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{a}(x,j) = \mathbf{g}_j(x), \qquad j \in 0:m_2-1, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a} = \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2}\,\partial x^{r_1}}\,\mathbf{a} \in C(\mathbb{R}^2), \\ \mathbf{a}(x+m_1,y) \equiv \mathbf{a}(x,y+m_2) \equiv \mathbf{a}(x,y). \end{gathered} \tag{15}$$

ТЕОРЕМА 2. *Предельная поверхность Кунса является единственным решением задачи* (15).

Доказательство. Воспользуемся доказанной в [5] теоремой об экстремальном свойстве поверхности Кунса. Положим

$$I_u(g) = \int_0^{m_1} g(x)\,dx, \qquad I_v(f) = \int_0^{m_2} f(y)\,dy.$$

Пусть E_u — множество m_1-периодических функций класса C^{r_1}, E_v — множество m_2-периодических функций класса C^{r_2}. Определим операторы A_u и A_v формулами

$$A_u(g) = \frac{\partial^{r_1} g}{\partial x^{r_1}}, \qquad A_v(f) = \frac{\partial^{r_2} f}{\partial y^{r_2}}.$$

Основное условие в теореме связано с экстремальными задачами для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v. В данном случае, экстремальная задача для функции, заданной на множестве D_u, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \int_0^{m_1} \big[g^{(r_1)}(x)\big]^2 dx \to \inf, \\ g(i) = x_i, \quad i \in 0 : m_1 - 1, \\ g \in C^{r_1}(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{16}$$

Согласно свойству минимальной нормы для предельных сплайнов (см. [2]), единственным решением задачи (16) является предельный сплайн, который может быть представлен в виде

$$g_*(u) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, x_i.$$

Это в точности соответствует требуемому условию теоремы. Аналогичным образом проверяется условие, связанное с экстремальной задачей для функции, заданной на множестве D_v.

Пусть T_{uv} — пространство непрерывных функций, имеющих период m_1 по первому аргументу и период m_2 — по второму. Положим

$$E_{uv} = \Big\{ e \in T_{uv} \;\Big|\; \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\, \partial y^{r_2}}\, \mathbf{a} = \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2}\, \partial x^{r_1}}\, \mathbf{a} \in C(\mathbb{R}^2) \Big\}.$$

Так же, как в [5], обозначим через $\mathbf{E}_{uv}$ пространство вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству E_{uv}. Ясно, что предельная поверхность Кунса, построенная по формуле (8), принадлежит пространству $\mathbf{E}_{uv}$. Так как в данном случае $A_{u,*} = \frac{\partial^{r_1}}{\partial x^{r_1}}$, $A_{*,v} = \frac{\partial^{r_2}}{\partial y^{r_2}}$, то по построению пространства E_{uv} выполняется равенство

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, e = A_{*,v}\, A_{u,*}\, e, \qquad e \in E_{uv}.$$

Все оставшиеся условия, требуемые в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса, являются элементарными свойствами интегралов и производных функций двух переменных. Применяя теорему, заключаем, что поверхность Кунса, построенная по формуле (8), является единственным решением задачи (15). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).

2. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

3. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`).

4. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`).

5. Чашников Н. В. *Экстремальные свойства поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).