ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ С ВЕКТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

Д. А. Хорохонов — d.khorokhonov@mail.ru

Н. В. Чашников — nik239@list.ru

4 сентября 2007 г.

1°. Пусть $N = mn$, где m, n — натуральные числа, отличные от единицы. Напомним, как вводятся дискретные N-периодические B-сплайны ([1], [2, с. 9–12]). B-сплайн первого порядка на основном периоде $0:N-1$ задаётся явно

$$Q_1(j) = \begin{cases} n-j & \text{при } j \in 0:n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n:N-n, \\ j-N+n & \text{при } j \in N-n+1:N-1. \end{cases} \tag{1}$$

B-сплайны более высоких порядков определяются с помощью циклической свёртки

$$Q_\nu = Q_1 * Q_{\nu-1}, \quad \nu = 2, 3, \ldots. \tag{2}$$

Отметим, что B-сплайн $Q_r(j)$ принимает только целые неотрицательные значения. Более глубоким является следующее свойство:

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j - pn) \equiv n^{2r-1}. \tag{3}$$

В [1] и [2, с. 17] тождество (3) доказывается с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и теоремы о свёртке.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Введём нормализованные B-сплайны

$$\widetilde{Q}_r(j) = \frac{1}{n^{2r-1}}\, Q_r(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Для них формулы (1)–(3) примут вид

$$\widetilde{Q}_1(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0:n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n:N-n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N-n+1:N-1; \end{cases} \tag{5}$$

$$\widetilde{Q}_\nu = \frac{1}{n}(\widetilde{Q}_1 * \widetilde{Q}_{\nu-1}), \quad \nu = 2, 3, \ldots; \tag{6}$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_r(j - pn) \equiv 1. \tag{7}$$

Дадим элементарное (без использования ДПФ) доказательство тождества (7), играющего в дальнейшем важную роль.

Отметим, что в силу определения (5)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(j) = n. \tag{8}$$

Зафиксируем j и представим его в виде $j = ln + r$, где $r \in 0:n-1$, $l \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_1(j - pn) = \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_1\bigl((l-p)n + r\bigr) = \sum_{q=0}^{m-1} \widetilde{Q}_1(qn + r) =$$
$$= \widetilde{Q}_1(r) + \widetilde{Q}_1\bigl((m-1)n + r\bigr) = 1 - \tfrac{r}{n} + \tfrac{(m-1)n+r}{n} - (m-1) = 1.$$

Формула (7) при $r = 1$ установлена. Сделаем индукционный переход от $r-1$ к r. Согласно (6) и (8) имеем

$$\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_r(j - pn) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(k)\, \widetilde{Q}_{r-1}(j - pn - k) =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(k) \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r-1}(j - k - pn) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(k) = 1,$$

что и требовалось доказать.

2°. Дискретным N-периодическим сплайном с векторными коэффициентами называется вектор-функция вида

$$\widetilde{S}(j)=\sum_{p=0}^{m-1}a_p\,\widetilde{Q}_r(j-pn),\quad j\in\mathbb{Z},$$

где $a_p\in\mathbb{C}^s$. Считаем, что коэффициенты a_p продолжены m-периодически на все целые p.

Рассмотрим вопрос о вычислении значений $\widetilde{S}(j)$ при всех $j\in 0:N$. Обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_1(j)&=\sum_{p=0}^{m-1}a_p\,\widetilde{Q}_1(j-pn),\\ \widetilde{S}_\nu&=\frac{1}{n}\,(\widetilde{Q}_1*\widetilde{S}_{\nu-1}),\quad \nu=2,3,\ldots.\end{aligned}\tag{9}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство* $\widetilde{S}=\widetilde{S}_r$.

Доказательство. При $r=1$ утверждение следует из определений. Сделаем индукционный переход от $r-1$ к r. Согласно (6) имеем

$$\widetilde{S}_r(j)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_1(k)\,\widetilde{S}_{r-1}(j-k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_1(k)\sum_{p=0}^{m-1}a_p\widetilde{Q}_{r-1}(j-k-pn)=$$
$$=\sum_{p=0}^{m-1}a_p\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_1(k)\widetilde{Q}_{r-1}(j-pn-k)\Big\}=\sum_{p=0}^{m-1}a_p\,\widetilde{Q}_r(j-pn)=\widetilde{S}(j).\quad\square$$

3°. Схема (9) допускает эффективную вычислительную реализацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедлива формула*

$$\widetilde{S}_1(ln+r)=a_l+\tfrac{r}{n}\Delta a_l,\quad r\in 0:n-1,\ l\in 0:m-1.\tag{10}$$

Здесь $a_m=a_0$.

Доказательство. В силу m-периодичности

$$\widetilde{S}_1(ln+r)=\sum_{p=0}^{m-1}a_p\,\widetilde{Q}_1\big((l-p)n+r\big)=\sum_{q=0}^{m-1}a_{l-q}\,\widetilde{Q}_1(qn+r)=$$
$$=a_l\,\widetilde{Q}_1(r)+a_{l-m+1}\,\widetilde{Q}_1\big((m-1)n+r\big)=a_l\,(1-\tfrac{r}{n})+a_{l+1}\,\tfrac{r}{n}=a_l+\tfrac{r}{n}\,\Delta a_l.$$

Предложение доказано. $\square$

Формула (10) справедлива и при $r = n$. В этом случае она принимает вид

$$\widetilde{S}_1\bigl((l+1)n\bigr) = a_{l+1}, \quad l \in 0:m-1. \tag{11}$$

При $l \in 0:m-2$ равенство (11) следует из (10) при $r = 0$. При $l = m-1$ имеем $\widetilde{S}_1(N) = \widetilde{S}_1(0) = a_0 = a_m$, что соответствует (11). Это замечание позволяет утверждать, что наряду с (10) справедлива формула

$$\widetilde{S}_1(ln + r + 1) = a_l + \tfrac{r+1}{n}\, \Delta a_l, \quad r \in 0:n-1,\ l \in 0:m-1. \tag{12}$$

Теперь можно записать алгоритм вычисления значений $\widetilde{S}_1(j)$ при всех $j \in 0:N$:

$$\begin{gathered} \widetilde{S}_1(0) = a_0; \\ \widetilde{S}_1(ln + r + 1) = \widetilde{S}_1(ln + r) + \tfrac{1}{n}\, \Delta a_l, \\ r \in 0:n-1, \quad l \in 0:m-1. \end{gathered} \tag{13}$$

Равенство (13) получено путём вычитания (10) из (12).

Приведём на псевдоязыке программу, реализующую алгоритм (13):

```
s1(0) := a(0);   n1 := 1/n;   j := 0;
for l := 1 to m do begin
  h := n1 * (a(l) − a(l−1));
  for r := 1 to n do begin
    j := j + 1; s1(j) := s1 (j−1) + h
  end
end
```

В программе используется набор векторов-коэффициентов a(0), a(1), …, a(m), в котором a(m) = a(0). В результате работы программы получаем $\widetilde{S}_1(j) =$ $=$ s1(j) при $j \in 0:N$.

4°. Обратимся к вопросу о вычислении циклической свёртки

$$y(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(k)\, x(j-k),$$

где $x(j) = \bigl(x_1(j), x_2(j), \ldots, x_s(j)\bigr)$ — векторный N-периодический сигнал.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо равенство*

$$y(j) = \frac{1}{n} \Bigl\{ x(j) + \sum_{k=0}^{n-1} \Bigl(1 - \frac{k}{n}\Bigr) \bigl[x(j-k) + x(j+k)\bigr] \Bigr\}. \tag{14}$$

Доказательство. В силу N-периодичности сигнала x имеем

$$ny(j) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big) x(j-k) + \sum_{k=N-n+1}^{N-1} \Big(1 - \frac{N-k}{n}\Big)\, x\big(j + (N-k)\big) =$$
$$= x(j) + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big) \big[x(j-k) + x(j+k)\big],$$

что равносильно (14). □

Зафиксируем $j \in 0 : N-1$ и введём обозначения

$$t_k = 1 - \frac{k}{n}, \quad d_0 = x(j), \quad d_k = x(j-k) + x(j+k) \quad \text{при } k \in 1 : n-1.$$

Тогда формулу (14) можно переписать в виде

$$y(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_k\, d_k.$$

Для вычисления последней суммы построим последовательность векторов $\{h_k\}$ по правилу

$$h_k = d_k + h_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \quad h_{-1} = \mathbb{O}. \tag{15}$$

Учитывая, что $t_k - t_{k+1} = \frac{1}{n}$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_k\, d_k = \sum_{k=0}^{n-1} t_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k\, h_k - \sum_{k=-1}^{n-2} t_{k+1}\, h_k =$$
$$= t_{n-1}\, h_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} h_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k.$$

Следовательно,

$$y(j) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} h_k.$$

Вычисление $y(j)$ сведено к сложению векторов h_k, последовательно определяемых формулой (15).

Запишем на псевдоязыке программу, реализующую описанный алгоритм вычисления векторной циклической свёртки $y(j)$ при всех $j \in 0 : N$:

```
n1 := 1/(n*n);
for j := 0 to N−1 do begin
  h := x(j);   s := h;
  for k := 1 to n−1 do begin
    h := h + x(j−k) + x(j+k);
    s := s + h
  end;
  y(j) := n1 * s
end;
y(N) := y(0)
```

В программе используются векторные величины $\mathrm{x}(-n+1), \mathrm{x}(-n), \ldots, \mathrm{x}(N+ + n-2)$, при этом в силу N-периодичности

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(j) &= \mathrm{x}(N+j) \quad \text{при } j \in -n+1:-1, \\ \mathrm{x}(j) &= \mathrm{x}(j-N) \quad \text{при } j \in N:N+n-2. \end{aligned}$$

После работы программы в массиве $\mathrm{y}(0:N)$ будут находиться требуемые векторные значения циклической свёртки.

5°. Для вычисления значений сплайна $\widetilde{S}_r(j)$ при всех $j \in 0:N$, согласно (9), потребуется один раз применить алгоритм, описанный в п. 3°, и $r-1$ раз алгоритм, описанный в п. 4°.

6°. Рассмотрим задачу векторной сплайн-интерполяции

$$\widetilde{S}_r(ln) = z(l), \quad l \in 0:m-1, \tag{16}$$

где $z(l) = \big(z_1(l), z_2(l), \ldots, z_s(l)\big)$. Она распадается на s независимых скалярных подзадач

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{p\nu}\, \widetilde{Q}_r\big((l-p)n\big) = z_\nu(l), \quad \nu = 1, \ldots, s,$$

каждую из которых (при фиксированном ν) с учётом (4) можно переписать так:

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{p\nu}\, Q_r\big((l-p)n\big) = n^{2r-1} z_\nu(l), \quad l \in 0:m-1. \tag{17}$$

Решение задачи (17) известно ([1], [2, с. 21–22]):

$$a_{p\nu} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n^{2r-1}\, Z_\nu(k)}{T_r(k)}\, \omega_m^{kp}, \quad p \in 0:m-1. \tag{18}$$

Здесь $Z_\nu = \mathcal{F}_m(z_\nu)$ и

$$T_r(k) = \begin{cases} \quad n^{2r-1} & \text{при } k = 0, \\ \bigl(2\sin\frac{\pi k}{m}\bigr)^{2r}\,\Lambda_r(k) & \text{при } k \in 1:m-1; \end{cases}$$

$$\Lambda_r(k) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{\pi(qm+k)}{N}\right)^{-2r}.$$

Обозначим $\widetilde{T}_r(k) = \dfrac{1}{n^{2r-1}}\,T_r(k)$, так что

$$\widetilde{T}_r(k) = \begin{cases} \quad 1 & \text{при } k = 0, \\ \bigl(2\sin\frac{\pi k}{m}\bigr)^{2r}\,\widetilde{\Lambda}_r(k) & \text{при } k \in 1:m-1; \end{cases}$$

$$\widetilde{\Lambda}_r(k) = \sum_{q=0}^{n-1}\left(2n\,\sin\frac{\pi(qm+k)}{N}\right)^{-2r}.$$

Тогда формула (18) примет вид

$$a_{p\nu} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{Z_\nu(k)}{\widetilde{T}_r(k)}\,\omega_m^{kp}, \quad p \in 0:m-1.$$

Решением задачи (16) является следующий набор векторов-коэффициентов сплайна $\widetilde{S}_r$: $a_p = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{ps})$, $p \in 0:m-1$.

7°. Пусть $x(j) = \bigl(x_1(j), x_2(j), \ldots, x_s(j)\bigr)$. Поскольку

$$\sum_{j=0}^{N-1}\bigl\|\bigl(\Delta^r x\bigr)(j)\bigr\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{\nu=1}^{s}\bigl|\bigl(\Delta^r x_\nu\bigr)(j)\bigr|^2 = \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{j=0}^{N-1}\bigl|\bigl(\Delta^r x_\nu\bigr)(j)\bigr|^2,$$

то, принимая во внимание экстремальное свойство интерполяционного сплайна ([1],[2, с. 23–24]), можно утверждать, что векторный интерполяционный сплайн $\widetilde{S}_r(j)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{j=0}^{N-1}\bigl\|\bigl(\Delta^r x\bigr)(j)\bigr\|^2 \to \min,$$
$$x(ln) = z(l), \quad l \in 0:m-1,$$

на множестве дискретных N-периодических вектор-функций $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

8°. Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании для построения замкнутых кривых. Чтобы пояснить это, перепишем формулу для $\widetilde{S}_r(j)$ в виде

$$\widetilde{S}_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_r(j - pn)\, a_p.$$

Нас интересует случай вещественных a_p, $a_p \in \mathbb{R}^s$. При фиксированном j числа $\widetilde{Q}_r(j - pn)$, $p \in 0 : m - 1$, неотрицательны и в сумме равны единице, так что $\widetilde{S}_r(j)$ есть выпуклая комбинация векторов a_p. В геометрическом моделировании векторы a_p называются *полюсами*. Когда j пробегает значения от 0 до N, вектор $\widetilde{S}(j)$ описывает замкнутую дискретную кривую в $\mathbb{R}^s$, содержащуюся в выпуклой оболочке полюсов. Кривую с требуемыми свойствами получают либо при непосредственном задании полюсов, либо при полюсах, определяемых из интерполяционных условий.

ПРИМЕР 1. *Моделирование лепестковой кривой.*

Пусть $m = 20$, $n = 16$, $r = 2$, $s = 2$. Решим задачу векторной сплайн-интерполяции для точек $z(j)$, приведённых в табл. 1 и изображённых на рис. 1. Коэффициенты a_p интерполяционного сплайна и его значения показаны на рис. 2. Замкнутая ломаная, полученная путём соединения соседних точек сплайна отрезками, представлена на рис. 3.

Таблица 1

j	$z(j)$	j	$z(j)$
0	$(0.000, 0.000)$	10	$(0.000, 1.000)$
1	$(-0.698, 0.111)$	11	$(0.111, 0.698)$
2	$(-0.951, 0.309)$	12	$(0.000, 0.000)$
3	$(-0.630, 0.321)$	13	$(-0.321, -0.630)$
4	$(0.000, 0.000)$	14	$(-0.588, -0.809)$
5	$(0.500, -0.500)$	15	$(-0.500, -0.500)$
6	$(0.588, -0.809)$	16	$(0.000, 0.000)$
7	$(0.321, -0.630)$	17	$(0.630, 0.321)$
8	$(0.000, 0.000)$	18	$(0.951, 0.309)$
9	$(-0.111, 0.698)$	19	$(0.698, 0.111)$

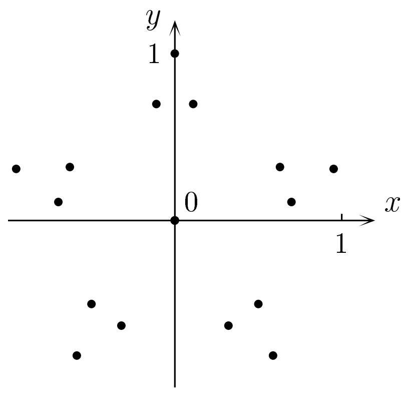

Рис. 1. Точки интерполяции

9°. Обратимся к двумерной задаче векторной сплайн-интерполяции. Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Зададим два набора вектор-функций

$$f_i \colon (0 : N_2 - 1) \to \mathbb{R}^3, \qquad i \in 0 : m_1 - 1,$$
$$g_j \colon (0 : N_1 - 1) \to \mathbb{R}^3, \qquad j \in 0 : m_2 - 1,$$

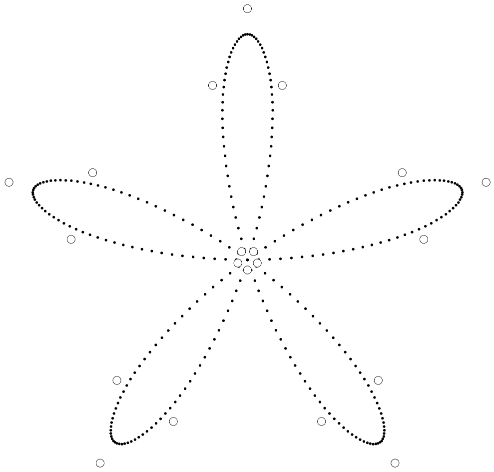

Рис. 2. Полюсы и значения дискретного сплайна

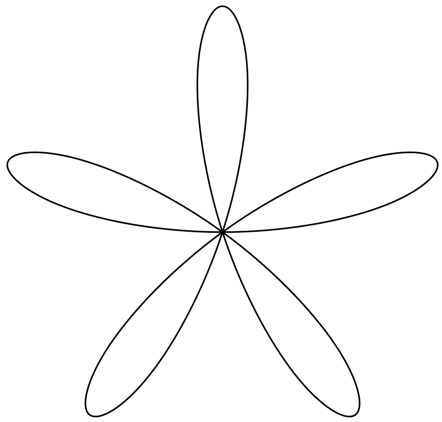

Рис. 3. Пятилистник

для которых выполнены равенства

$$f_i(jn_2) = g_j(in_1), \quad i \in 0 : m_1 - 1,\ j \in 0 : m_2 - 1. \tag{19}$$

Ставится задача: построить вектор-функцию $c\colon (0 : N_1 - 1) \times (0 : N_2 - 1) \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям

$$c(in_1, \cdot\,) = f_i, \quad i \in 0 : m_1 - 1, \tag{20}$$

$$c(\,\cdot\,, jn_2) = g_j, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{21}$$

Выберем два натуральных числа r_1, r_2. Для каждого $q \in 0 : N_2 - 1$ построим сплайн $\widetilde{S}^{(q)}_{r_1}$, решающий интерполяционную задачу

$$\widetilde{S}^{(q)}_{r_1}(in_1) = f_i(q), \quad i \in 0 : m_1 - 1. \tag{22}$$

Положим $h_j(p) = g_j(p) - \widetilde{S}^{(jn_2)}_{r_1}(p)$ для всех $p \in 0 : N_1 - 1$, $j \in 0 : m_2 - 1$. Из (22) и (19) следует, что

$$h_j(in_1) = g_j(in_1) - f_i(jn_2) = 0, \quad i \in 0 : m_1 - 1,\ j \in 0 : m_2 - 1. \tag{23}$$

Далее для каждого $p \in 0 : N_1 - 1$ построим сплайн $\widetilde{S}^{(p)}_{r_2}$, решающий интерполяционную задачу

$$\widetilde{S}^{(p)}_{r_2}(jn_2) = h_j(p), \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{24}$$

Положим

$$c(p, q) = \widetilde{S}^{(q)}_{r_1}(p) + \widetilde{S}^{(p)}_{r_2}(q), \quad p \in 0 : N_1 - 1,\ q \in 0 : N_2 - 1. \tag{25}$$

Покажем, что функция $c(p,q)$ удовлетворяет условиям (20) и (21).

Согласно (23) и (24), $\widetilde{S}_{r_2}^{(in_1)}(jn_2) = 0$ при всех $j \in 0:m_2-1$, поэтому $\widetilde{S}_{r_2}^{(in_1)}(q) \equiv 0$ при всех $i \in 0:m_1-1$. Принимая во внимание (22), получаем

$$c(in_1, q) = \widetilde{S}_{r_1}^{(q)}(in_1) = f_i(q), \quad q \in 0:N_2-1,\ i \in 0:m_1-1,$$

т. е. выполнено условие (20). В силу (24)

$$\begin{aligned} c(p, jn_2) &= \widetilde{S}_{r_1}^{(jn_2)}(p) + \widetilde{S}_{r_2}^{(p)}(jn_2) = \\ &= \widetilde{S}_{r_1}^{(jn_2)}(p) + h_j(p) = g_j(p), \quad p \in 0:N_1-1,\ j \in 0:m_2-1, \end{aligned}$$

т. е. условие (21) также выполнено.

10°. Рассмотрим задачу построения поверхности, имеющей вид замкнутой трубки. Определять форму поверхности будет остов, состоящей из двух наборов дискретных кривых. Кривые первого набора f_i будут идти вдоль трубки, кривые второго набора g_j — поперёк. Требуемая поверхность будет задаваться дискретным сплайном (25), N_1-периодическим по первому аргументу и N_2-периодическим — по второму.

ПРИМЕР 2. *Моделирование трубчатой поверхности.*

Начнём с задания плоской кривой, изображающей узел. Положим

$$\begin{aligned} x(t) &= (\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 3t)\cos 2t, \\ y(t) &= (\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 3t)\sin 2t. \end{aligned}$$

При изменении t от 0 до 2π точка $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ описывает замкнутую кривую, представленную на рис. 4. Теперь добавим третью координату $z(t) = \frac{1}{5}\sin 3t$. Вектор-функция $r(t) = \bigl(x(t), y(t), z(t)\bigr)$ определяет замкнутую пространственную кривую, имеющую вид узла.

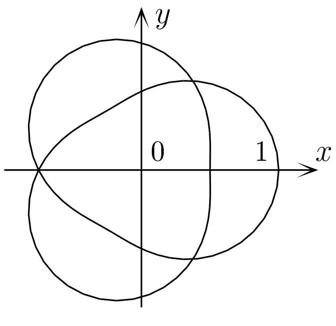

Рис. 4. Плоский узел

Введём две остовные кривые, которые будут идти вдоль трубки:

$$\begin{aligned} r_0(t) &= r(t) + \frac{1}{10}\,\frac{r'(t) \times (0,0,1)}{\|r'(t) \times (0,0,1)\|}, \\ r_1(t) &= r(t) - \frac{1}{10}\,\frac{r'(t) \times (0,0,1)}{\|r'(t) \times (0,0,1)\|}. \end{aligned}$$

Здесь $\times$ — знак векторного умножения. При фиксированном t точки $r_0(t)$ и $r_1(t)$ получаются из $r(t)$ сдвигом на $\frac{1}{10}$ вдоль двух противоположных направлений, ортогональных вектору $r'(t)$ и оси Oz.

Поперечные сечения будут определять три остовные кривые $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — окружности с центрами $r(0)$, $r(2\pi/3)$, $r(4\pi/3)$, радиусом $\frac{1}{10}$, лежащие в плоскостях, ортогональных векторам $r'(0)$, $r'(2\pi/3)$ и $r'(4\pi/3)$ соответственно. Кривые r_0, r_1, v_0, v_1, v_2 изображены на рис. 5.

Осталось получить дискретные функции f_i и g_j из непрерывных функций r_i и v_j. Пусть $m_1 = 2$, $n_1 = 5$ и $m_2 = 3$, $n_2 = 40$, так что $N_1 = 10$, $N_2 = 120$. Положим

$$f_i(q) = r_i(2\pi q/N_2), \quad q \in 0:N_2 - 1,\ i \in 0:1,$$
$$g_j(p) = v_j(2\pi p/N_1), \quad p \in 0:N_1 - 1,\ j \in 0:2.$$

На рис. 6 показана трубчатая поверхность, построенная по формуле (25). Остовные кривые выделены жирными линиями.

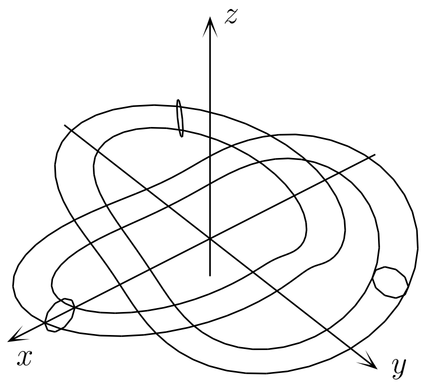

Рис. 5. Остовные кривые

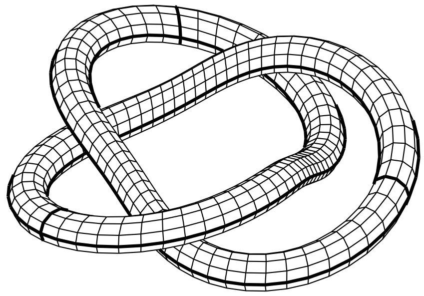

Рис. 6. Узел

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.