АНСАМБЛИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ*

В. Н. Малозёмов   С. М. Машарский
malv@math.spbu.ru   smash@scientist.com

28 мая 2008 г.

1°. Конечное множество $\mathcal{Q}$ сигналов x из $\mathbb{C}_N$ с одинаковой энергией

$$E(x) := \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|x(j)\bigr|^2 = A$$

называется *ансамблем сигналов*. Наиболее интересны ансамбли, в которых сигналы максимально отличаются друг от друга при всех возможных сдвигах по времени.

Два сигнала x, y называются *некоррелированными*, если их взаимная корреляция тождественно равна нулю, т. е.

$$R_{xy}(j) := \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\overline{y}(k-j) \equiv 0.$$

Поскольку

$$\overline{R_{yx}}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{y}(k)\,x(k-j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\overline{y}(k+j) = R_{xy}(-j),$$

то одновременно с тождеством $R_{xy}(j) \equiv 0$ выполняется тождество $R_{yx}(j) \equiv 0$. Перепишем эти тождества в эквивалентном виде

$$\bigl\langle x, y(\,\cdot - j)\bigr\rangle = 0, \quad \bigl\langle y, x(\,\cdot - j)\bigr\rangle = 0 \qquad \text{при всех } j \in \mathbb{Z}.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Видим, что некоррелированность сигналов x, y соответствует тому, что сигнал x ортогонален всем сдвигам сигнала y и наоборот, сигнал y ортогонален всем сдвигам сигнала x. В частности, сигналы x и y ортогональны. Как следствие получаем, что количество некоррелированных сигналов в ансамбле не превосходит N.

Оказывается, существуют ансамбли, содержащие ровно N некоррелированных сигналов. Например,

$$\mathcal{Q} = \bigl\{u_k(j) = \omega_N^{kj} \bigm| k \in 0 : N-1\bigr\}.$$

Ясно, что $\mathcal{Q}$ — ансамбль с $A = N$. При этом

$$R_{u_k,u_s}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} u_k(l)\,\overline{u_s}(l-j) = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{l(k-s)+sj} = \omega_N^{sj}\,N\,\delta_N(k-s).$$

В частности, $R_{u_k,u_s}(j) \equiv 0$ при $k \neq s$. Значит, ансамбль $\mathcal{Q} = \{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ состоит из N некоррелированных сигналов.

Отметим, что $R_{u_k,u_k}(j) = N\,u_k(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

2°. Введем две характеристики произвольного ансамбля сигналов $\mathcal{Q}$:

$$R_a = \max_{x\in\mathcal{Q}} \max_{j\in 1:N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|,$$
$$R_c = \max_{\substack{x,y\in\mathcal{Q}\\ x\neq y}} \max_{j\in 0:N-1} \bigl|R_{xy}(j)\bigr|.$$

Если $R_a = 0$, то все сигналы из $\mathcal{Q}$ являются дельта-коррелированными. Если же $R_c = 0$, то сигналы из $\mathcal{Q}$ попарно некоррелированы. Следующее утверждение показывает, что не существует ансамбля $\mathcal{Q}$, у которого одновременно и $R_a = 0$, и $R_c = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть ансамбль $\mathcal{Q}$ состоит из m сигналов и $E(x) = A$ при всех $x \in \mathcal{Q}$. Тогда*

$$N\left(\frac{R_c}{A}\right)^2 + \frac{N-1}{m-1}\left(\frac{R_a}{A}\right)^2 \geqslant 1. \tag{1}$$

Неравенство (1) называется *неравенством Сидельникова-Сарвате* [1–3].

Доказательство. Нам потребуется формула

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xy}(j)\bigr|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j)\,\overline{R_{yy}}(j). \tag{2}$$

Её справедливость проверяется так:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xy}(j)\bigr|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \Biggl(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\overline{y}(k-j)\Biggr)\Biggl(\sum_{l=0}^{N-1} \overline{x}(l)\,y(l-j)\Biggr) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{N-1} x(k)\,\overline{x}(l) \sum_{j=0}^{N-1} y(l-j)\,\overline{y}\bigl(l-j+(k-l)\bigr) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{N-1} x(k)\,\overline{x}(l) \sum_{j=0}^{N-1} y(j)\,\overline{y}\bigl(j+(k-l)\bigr) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{l=0}^{N-1} \overline{x}(l)\,\overline{R_{yy}}(k-l) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{l=0}^{N-1} \overline{x}(k-l)\,\overline{R_{yy}}(l) = \sum_{l=0}^{N-1} \overline{R_{yy}}(l)\,R_{xx}(l).$$

Согласно (2) имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Biggl|\sum_{x\in\mathcal{Q}} R_{xx}(j)\Biggr|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \Biggl(\sum_{x\in\mathcal{Q}} R_{xx}(j)\Biggr)\Biggl(\sum_{y\in\mathcal{Q}} \overline{R_{yy}}(j)\Biggr) =$$

$$= \sum_{x,y\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j)\,\overline{R_{yy}}(j) = \sum_{x,y\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xy}(j)\bigr|^2 =$$

$$= \sum_{\substack{x,y\in\mathcal{Q}\\ x\neq y}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xy}(j)\bigr|^2 + \sum_{x\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2. \tag{3}$$

Займёмся оценками. Поскольку $R_{xx}(0) = E(x) = A$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Biggl|\sum_{x\in\mathcal{Q}} R_{xx}(j)\Biggr|^2 \geqslant \Biggl|\sum_{x\in\mathcal{Q}} R_{xx}(0)\Biggr|^2 = m^2 A^2,$$

$$\sum_{x\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2 = \sum_{x\in\mathcal{Q}} \sum_{j=1}^{N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2 + \sum_{x\in\mathcal{Q}} \bigl|R_{xx}(0)\bigr|^2 \leqslant$$
$$\leqslant m\,(N-1)\,R_a^2 + m\,A^2.$$

Кроме того,

$$\sum_{\substack{x,y\in\mathcal{Q}\\ x\neq y}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xy}(j)\bigr|^2 \leqslant m\,(m-1)\,N R_c^2.$$

На основании (3) получаем

$$m^2 A^2 \leqslant m\,(m-1)\,NR_c^2 + m\,(N-1)\,R_a^2 + m\,A^2$$

или

$$m\,(m-1)A^2 \leqslant m\,(m-1)\,NR_c^2 + m\,(N-1)\,R_a^2.$$

Последнее неравенство равносильно (1). Предложение доказано. □

3°. Неравенство (1) показывает, что величины R_a и R_c не могут быть одновременно сколь угодно малыми. Мы рассмотрим два крайних случая, когда одна из этих величин равна нулю, а другая принимает наименьшее возможное значение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого ансамбля $\mathcal{Q}$, состоящего из N попарно некоррелированных сигналов, неравенство* (1) *выполняется как равенство.*

Доказательство. По условию $m = N$ и $R_c = 0$. Нужно проверить, что $R_a = A$.

Мы установим более сильный результат:

$$\bigl|R_{xx}(j)\bigr| \equiv A \quad \text{при всех } x \in \mathcal{Q}\,.$$

При $R_c = 0$ формула (3) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Bigl|\sum_{x\in\mathcal{Q}} R_{xx}(j)\Bigr|^2 = \sum_{x\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{x\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2 \geqslant \Bigl|\sum_{x\in\mathcal{Q}} R_{xx}(0)\Bigr|^2 = N^2 A^2. \tag{4}$$

Вместе с тем, по неравенству Коши-Буняковского

$$\bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2 = \Bigl|\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\overline{x}(k-j)\Bigr|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \bigl|x(k)\bigr|^2 \sum_{k=0}^{N-1} \bigl|x(k-j)\bigr|^2 = A^2.$$

Допустив, что при некоторых $x \in \mathcal{Q}$ и $j \in 0 : N-1$ будет $\bigl|R_{xx}(j)\bigr| < A$, получим

$$\sum_{x\in\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|R_{xx}(j)\bigr|^2 < N^2 A^2,$$

что противоречит (4). Предложение доказано. □

4°. Теперь обратимся к ансамблям, состоящим из дельта-коррелированных сигналов. Для таких ансамблей $R_a = 0$, так что неравенство (1) принимает вид $R_c \geqslant A/\sqrt{N}$. Эта оценка не зависит от количества сигналов m. Она, в частности, обращается в равенство, если

$$\bigl|R_{xy}(j)\bigr| \equiv \frac{A}{\sqrt{N}} \quad \text{при всех } x, y \in \mathcal{Q},\ x \neq y. \tag{5}$$

Приведём пример ансамбля, для которого выполняется условие (5).

Рассмотрим двухпараметрическое семейство сигналов

$$a_{kp}(j) = \omega_N^{k(j^2+pj)}, \quad k, p \in 0 : N-1, \quad \text{НОД}\,(k, N) = 1. \tag{6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При нечетном N сигналы a_{kp} являются дельта-коррелированными.*

Доказательство. Обозначим для простоты $x = a_{kp}$. Имеем

$$R_{xx}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l+j)\,\overline{x}(l) = \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{k(l^2+2lj+j^2+pl+pj)-k(l^2+pl)} =$$
$$= \omega_N^{k(j^2+pj)} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{2klj} = N\,x(j)\,\delta_N(2kj). \tag{7}$$

Покажем, что в данном случае $\delta_N(2kj) = \delta_N(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Это эквивалентно равенству $\delta_N\bigl(\langle 2kj\rangle_N\bigr) = \delta_N(j)$ при $j \in 0 : N-1$.

По условию N взаимно просто как с 2, так и с k, поэтому число $2k$ взаимно просто с N. Отсюда следует, что отображение $j \to \langle 2kj\rangle_N$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ (*эйлеровой перестановкой*), переводящей ноль в ноль. Это и гарантирует справедливость равенства $\delta_N\bigl(\langle 2kj\rangle_N\bigr) = \delta_N(j)$ при $j \in 0 : N-1$.

Формула (7) принимает вид $R_{xx}(j) = N\delta_N(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Остаётся сослаться на определение дельта-коррелированного сигнала (см., например, [4, с. 48]).

Предложение доказано. □

Пусть N — нечётное число. Возьмём два сигнала вида (6)

$$x(j) = \omega_N^{k(j^2+pj)}, \qquad y(j) = \omega_N^{s(j^2+pj)}.$$

Будем считать, что $k > s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При выполнении условия* НОД$(k-s,N)=1$ *справедливо тождество*

$$\big|R_{xy}(j)\big| \equiv \sqrt{N}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\big|R_{xy}(j)\big|^2 &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l+j)\,\overline{y}(l) \sum_{q=0}^{N-1} \overline{x}(q+j)\,y(q) = \\ &= \sum_{l,q=0}^{N-1} \omega_N^{k(l^2+2lj+j^2+pl+pj)-s(l^2+pl)-k(q^2+2qj+j^2+pq+pj)+s(q^2+pq)}.\end{aligned}$$

Степень приводится к виду

$$\begin{aligned}&k\,(l-q)(l+q+2j+p)-s\,(l-q)(l+q+p) = \\ &= (k-s)(l-q)(l+q+p)+2k\,(l-q)\,j\,.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\big|R_{xy}(j)\big|^2 &= \sum_{l,q=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)(l-q)(l+q+p)+2k(l-q)j} = \\ = \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)l(l+2q+p)+2klj} &= \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)l(l+p)+2klj} \sum_{q=0}^{N-1} \omega_N^{2(k-s)lq} = \\ &= N \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)l(l+p)+2klj}\, \delta_N\big(\langle 2(k-s)l\rangle_N\big).\end{aligned} \tag{9}$$

По условию N взаимно просто как с 2, так и с $k-s$. Значит, число $2(k-s)$ взаимно просто с N. В таком случае, отображение $l \to \big\langle 2(k-s)\,l\big\rangle_N$ является перестановкой множества $\{0,1,\ldots,N-1\}$, переводящей ноль в ноль. Учитывая этот факт, заключаем, что в сумме из правой части (9) отлично от нуля лишь одно слагаемое, соответствующее $l=0$. Приходим к тождеству $\big|R_{xy}(j)\big|^2 \equiv N$, равносильному (8). Предложение доказано. $\square$

Сигналы a_{kp} вида (6) имеют одинаковую энергию $E(a_{kp})=N$. Согласно предложению 3 при нечётном N любой их набор образует ансамбль $\mathcal{Q}$ с $A=N$ и $R_a=0$. Предположим, что сигналы a_{kp} из $\mathcal{Q}$ удовлетворяют двум дополнительным условиям:

– у них одинаковы p;

– для всех пар сигналов a_{kp}, a_{sp} из $\mathcal{Q}$ с $k > s$ разность $k - s$ взаимно проста с N.

Тогда по предложению 4 справедливо тождество

$$\left|R_{xy}(j)\right| \equiv \sqrt{N} \quad \text{при всех } x, y \in \mathcal{Q},\ x \neq y.$$

Оно совпадает с (5), поскольку в данном случае $A/\sqrt{N} = \sqrt{N}$.

Отметим, что при простом N всем сформулированным условиям удовлетворяют сигналы $a_{1,p}, a_{2,p}, \ldots, a_{N-1,p}$ в количестве $N - 1$.

Более общие ансамбли дельта-коррелированных сигналов со свойством (5) рассматривались в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидельников В. М. *О взаимной корреляции последовательностей* / В сб.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1971. Вып. 24. С. 15–42.

2. Sarwate D. V. *Bounds on crosscorrelation and autocorrelation of sequences* // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. Vol. IT-25. P. 720–724.

3. Сарвате Д. В., Персли М. Б. *Взаимно-корреляционные свойства псевдослучайных и родственных последовательностей* // ТИИЭР. 1980. Т. 68. № 5. С. 59–90.

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть первая. СПб.: НИИММ, 2003. 98 с.

5. Popović B. M. *Generalized chirp-like polyphase sequences with optimum correlation properties* // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. Vol. 38. No. 4. P. 1406–1409.