РАВНОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ*

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

М. Н. Юркина — istomina@syktsu.ru

11 апреля 2013 г.

Установлено, что равноугольный жёсткий фрейм, состоящий из m единичных векторов в n-мерном евклидовом пространстве, является полудизайном 4-го порядка тогда и только тогда, когда $m = n(n+1)/2$. Рассматривается важный пример равноугольного жёсткого фрейма, состоящего из $n+1$ вершин правильного симплекса, вписанного в единичную сферу (фрейм Мерседес-Бенц). Строится новая система векторов, состоящая из проекций середин ребер симплекса на сферу. Показывается, что эта система будет жёстким фреймом для любого $n \geqslant 2$, а равноугольной этой система будет только при $n = 2$ и $n = 7$. В последних двух случаях получаем равноугольный полудизайн 4-го порядка.

1°. Равноугольные жёсткие фреймы. Напомним определение равноугольной системы векторов (см. [1–3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система векторов $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathbb{R}^n$ называется равноугольной, если

$$\|x_k\| = 1, \quad k \in 1:m; \tag{1}$$

$$|\langle x_i, x_j \rangle| = c \quad \text{при } \; i \neq j, \tag{2}$$

где c — константа, $0 \leqslant c < 1$.

Поясним смысл условия (2). Для каждого вектора x_i рассмотрим прямую $L_i = \{x = \lambda x_i \mid \lambda \in (-\infty, \infty)\}$. Между прямыми L_i и L_j есть два угла α_{ij} и β_{ij}, $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = \pi$. Будем считать, что $\alpha_{ij} \in [0, \pi/2]$, $\beta_{ij} \in [\pi/2, \pi]$. Тогда $|\langle x_i, x_j \rangle| = \cos \alpha_{ij}$. Условие (2) означает, что все углы α_{ij} равны между собой.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

Число элементов равноугольной системы не может быть неограниченным. Справедливо неравенство

$$m \leqslant \tfrac{1}{2}n(n+1). \tag{3}$$

Оно впервые установлено в [1], простое доказательство см. в [3].

Далее будем рассматривать жёсткие фреймы, состоящие из единичных векторов. Введем обозначение для единичной сферы: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ называется жёстким фреймом, если

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x_i, x\rangle\big]^2 = \tfrac{m}{n}\,\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Для жёсткого фрейма необходимо выполняется неравенство $m \geqslant n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равноугольная система $\{x_1, \dots, x_m\}$ будет жёстким фреймом тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$ и выполняется равенство*

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}. \tag{5}$$

По поводу доказательства см. [3].

2°. Сферические полудизайны. Обобщением жёстких фреймов являются сферические полудизайны порядка t, где t — чётное число, $t \geqslant 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$ на сфере S^{n-1} называется сферическим полудизайном порядка t, если выполнены тождества

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \big[\langle x_i, x\rangle\big]^p = c_p\|x\|^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ p = 2, 4, \dots, t, \tag{6}$$

где

$$c_p = \frac{(p-1)!!}{n(n+2)\dots(n+p-2)}.$$

Заметим, что $c_2 = \frac{1}{n}$ и сферический полудизайн второго порядка является жёстким фреймом (по определению 2).

В [4] доказан следующий критерий сферического полудизайна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система векторов $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ является сферическим полудизайном порядка t тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle x_i, x_j\rangle\big]^t = c_t. \tag{7}$$

Выясним, при каких условиях равноугольный жёсткий фрейм является сферическим полудизайном 4-го порядка.

ТЕОРЕМА 1. *Чтобы равноугольный жёсткий фрейм $\{x_1, \dots, x_m\}$ был сферическим полудизайном 4-го порядка необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$m = \tfrac{1}{2}n(n+1). \tag{8}$$

Доказательство. Будем проверять равенство (7) при $t = 4$, где

$$c_4 = \frac{3}{n(n+2)}.$$

Для равноугольного жёсткого фрейма по формуле (5) имеем

$$|\langle x_i, x_j \rangle| = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}, \quad i \neq j.$$

Если же $i = j$, то $\langle x_i, x_i \rangle = 1$. Из (7) при $t = 4$ следует соотношение

$$m + (m^2 - m)\frac{(m-n)^2}{n^2(m-1)^2} = c_4 m^2 = \frac{3m^2}{n(n+2)}.$$

Это эквивалентно равенствам

$$n + \frac{(m-n)^2}{n(m-1)} = \frac{3m}{n+2},$$
$$(n^2 + m - 2n)(n+2) = 3n(m-1).$$

Отсюда m выражается через n по формуле $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. □

Применение теоремы 1 затруднено тем, что равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (m, n). А при дополнительном условии $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ они существуют ещё реже. Поэтому приходится довольствоваться редкими примерами.

Начнем с простейшего примера — фрейма Мерседес-Бенц на плоскости.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим три единичных вектора в $\mathbb{R}^2$: $\varphi_1 = (0, 1)$, $\varphi_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\varphi_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Легко проверить, что это жёсткий фрейм и $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\frac{1}{2}$ при $i \neq j$. Значит, углы между векторами φ_i равны 120°. Этот равноугольный жёсткий фрейм известен как фрейм Мерседес-Бенц ([5]). Здесь $n = 2$, $m = 3$ и $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. По теореме 1, $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — сферический полудизайн 4-го порядка.

ПРИМЕР 2. При $n = 3$, $m = 6$ равноугольный жёсткий фрейм можно получить из 12 вершин икосаэдра, вписанного в сферу S^2. Можно выбрать 6 вершин $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ так, что

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В силу предложения 1 система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ будет равноугольным жёстким фреймом, а по теореме 1 — сферическим полудизайном 4-го порядка.

Еще один интересный пример связан с серединами ребер правильного симплекса.

3°. Жёсткие фреймы, образованные из середин ребер правильных симплексов.

3.1. В [3, 5] введено понятие системы Мерседес-Бенц в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности $n \geqslant 2$. Система из $n+1$ единичных векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ называется системой Мерседес-Бенц, если

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Такая система является равноугольным жёстким фреймом. В [3, 5] предложен конструктивный способ ее построения.

Выпуклая оболочка точек $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ является правильным симплексом. В [6] рассматриваются ребра этого симплекса и проекции середин ребер на сферу S^{n-1} берутся в качестве узлов кубатурной формулы.

Рассмотрим середины ребер симплекса

$$x_{ij} = \tfrac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_j), \quad i < j.$$

Все эти векторы имеют одинаковые нормы, так как

$$\|x_{ij}\|^2 = \tfrac{1}{4}\big[2 + 2\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big] = \frac{n-1}{2n}.$$

Рассмотрим проекции векторов x_{ij} на единичную сферу:

$$X_{ij} = \frac{x_{ij}}{\|x_{ij}\|}, \quad i < j.$$

Количество таких векторов равно $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$, то есть ровно столько, сколько требуется в теореме 1. Но нужно ещё проверить, что система $\{X_{ij} : i < j\}$ будет равноугольным жёстким фреймом.

ТЕОРЕМА 2. *Система $\{X_{ij} : \ i < j\}$ является жёстким фреймом при любом натуральном $n \geqslant 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся четвёртым определением жёсткого фрейма (см. [3]). Нужно проверить равенство

$$S := \sum \big[\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle\big]^2 = \frac{m^2}{n} = \tfrac{1}{4}n(n+1)^2. \tag{9}$$

Всего в сумме m^2 слагаемых, где $m = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Слагаемые могут быть трех видов:

1) m скалярных произведений $\langle X_{ij}, X_{ij}\rangle = 1$;

2) p скалярных произведений $\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle$, где i, j, k, l попарно различны. В этом случае

$$\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle = \tfrac{1}{4}\big[\langle\varphi_i,\varphi_k\rangle + \langle\varphi_j,\varphi_k\rangle + \langle\varphi_i,\varphi_l\rangle + \langle\varphi_j,\varphi_l\rangle\big] = -\tfrac{1}{n}, \tag{10}$$
$$\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle = \frac{2n}{n-1}\Big(-\frac{1}{n}\Big) = -\frac{2}{n-1}.$$

3) q скалярных произведений $\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle$, где отрезки $[\varphi_i,\varphi_j]$ и $[\varphi_k,\varphi_l]$ имеют одну общую концевую точку. Пусть для определенности $j = k$. Тогда

$$\langle x_{ij}, x_{jl}\rangle = \tfrac{1}{4}\big[-\tfrac{1}{n} + 1 - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}\big] = \frac{n-3}{4n}, \tag{11}$$
$$\langle X_{ij}, X_{jl}\rangle = \frac{2n}{n-1}\frac{n-3}{4n} = \frac{n-3}{2(n-1)}.$$

Число q равно числу троек (i,j,l), причем индексы i,j,l можно переставлять. Такое число называется числом размещений:

$$q = A^3_{n+1} = \binom{n+1}{3}3! = (n+1)n(n-1).$$

Имеем

$$p = m^2 - m - q = m(m - 2n + 1).$$

Отсюда

$$S = m + p\big(\tfrac{2}{n-1}\big)^2 + q\big(\tfrac{n-3}{2(n-1)}\big)^2 =$$
$$= \frac{m}{(n-1)^2}\big[(n-1)^2 + 4(m-2n+1) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)^2\big].$$

Остается подставить $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. Получим

$$S = \tfrac{1}{4}n(n+1)^2 = \frac{m^2}{n}.$$

□

3.2. Выясним, при каких n построенный жёсткий фрейм $\{X_{ij} :\ 1 \leqslant i < j \leqslant \leqslant n+1\}$ будет равноугольным. У нас $X_{ij} = x_{ij}/\|x_{ij}\|$ и нормы $\|x_{ij}\|$ равны между собой. Поэтому условие равноугольности записывается в виде

$$|\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle| = \beta \ \text{ при } \ (i,j) \neq (k,l), \tag{12}$$

где β — некоторая константа. При проверке условия (12) возможны два случая:

1) Индексы i, j, k, l попарно различны. Тогда по формуле (10)

$$\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle = -\tfrac{1}{n}.$$

2) Среди концевых точек отрезков $[\varphi_i, \varphi_j]$ и $[\varphi_k, \varphi_l]$ есть одна общая точка. Тогда по формуле (11)

$$\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle = \frac{n-3}{4n} > -\tfrac{1}{n}. \tag{13}$$

Чтобы выполнить условие (12) надо $\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle$ приравнять к $1/n$:

$$\langle x_{ij}, x_{kl}\rangle = \frac{n-3}{4n} = \tfrac{1}{n},$$

откуда $n = 7$. Есть еще случай $n = 2$, когда все скалярные произведения вычисляются по формуле (13).

Итак, система $\{X_{ij} :\ 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}$ является равноугольной только при $n = 2$ и $n = 7$. Случай $n = 2$ уже был рассмотрен в примере 1. При $n = 7$ получаем

ПРИМЕР 3. Система векторов $\{X_{ij} :\ 1 \leqslant i < j \leqslant 8\}$ в пространстве $\mathbb{R}^7$ состоит из 28 единичных векторов и является равноугольным сферическим полудизайном 4-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lemmens P. W. H., Seidel J. J. *Equiangular lines* // J. Algebra. V. 24. 1973. №3. С. 494–512.
2. Casazza P. G., Redmond D. and Tremain J. C. *Real equiangular frames* (`http://www.math.missouri.edu/~pete`)
3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа. Вып. 39. 2009. С. 3—25.
4. Котелина Н. О., Певный А. Б. *Экстремальные свойства сферических полудизайнов* // Алгебра и анализ. Вып. 22. 2010. №5. С. 162–170.

5. Истомина М. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Вестник Сыктывкарского университета, Сер. 1. Вып. 6. 2006. С. 217–222.

6. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука. 1981.