ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

22 января 2011 г.

1°. Рассмотрим задачу квадратичного программирования

$$\begin{gathered} Q(x) := \tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \inf, \\ A[M,N] \times x[N] \geqslant b[M], \end{gathered} \tag{1}$$

где $D = D[N,N]$ — симметричная матрица. Множество планов (векторов $x = x[N]$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1)) обозначим Ω. План x_* называется *оптимальным*, если

$$Q(x_*) = \inf_{x \in \Omega} Q(x).$$

ТЕОРЕМА. *Предположим, что матрица D неотрицательно определена на $\mathbb{R}^N$, множество Ω непусто и целевая функция $Q(x)$ ограничена снизу на Ω. Тогда у задачи* (1) *существует оптимальный план. Он может быть получен путём решения конечного числа систем линейных уравнений.*

В таком виде теорема существования решения для задачи квадратичного программирования была сформулирована М. К. Гавуриным. В статье [1] и книге [2, с. 111–112] приведено краткое доказательство этой теоремы. Здесь будет дано развёрнутое доказательство.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Отметим некоторые свойства квадратичной функции.

При всех x, h из $\mathbb{R}^N$ и $t \in \mathbb{R}$ справедливо разложение

$$Q(x+th) = Q(x) + t\langle Dx + c, h\rangle + \tfrac{1}{2}\, t^2 \langle Dh, h\rangle. \tag{2}$$

В частности,

$$Q(x+h) - Q(x) = \langle Dx + c, h\rangle + \tfrac{1}{2} \langle Dh, h\rangle. \tag{3}$$

Если из (3) найти выражение для $\langle Dx + c, h\rangle$ и подставить его в (2), то придём к формуле

$$Q(x+th) = Q(x) + t\big[Q(x+h) - Q(x)\big] - \tfrac{1}{2}\, t(1-t)\langle Dh, h\rangle. \tag{4}$$

3°. Доказательству теоремы предпошлём два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. *Если квадратичная функция $Q(x)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^N$, то существует точка, в которой $Q(x)$ достигает наименьшего на $\mathbb{R}^N$ значения.*

Доказательство. Обозначим $\mu_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x)$. Согласно (2) при фиксированном x имеем

$$Q(x) + t\langle Dx + c, h\rangle + \tfrac{1}{2}\, t^2 \langle Dh, h\rangle \geqslant \mu_0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что $\langle Dh, h\rangle \geqslant 0$ при всех $h \in \mathbb{R}^N$. В силу (3)

$$Q(x+h) - Q(x) \geqslant \langle Dx + c, h\rangle \quad \forall\, x,\, h \in \mathbb{R}^N.$$

Очевидно, что точка x_*, в которой $Dx_* + c = \mathbb{O}$, является точкой минимума функции $Q(x)$ на $\mathbb{R}^N$.

Покажем, что в условиях леммы система линейных уравнений

$$Dx = -c \tag{5}$$

имеет решение. Допустим противное. Тогда найдется вектор $h_0 \in \mathbb{R}^N$ со свойствами $Dh_0 = \mathbb{O}$, $\langle c, h_0\rangle \neq 0$. При фиксированном $x = x_0$ и всех $t \in \mathbb{R}$ согласно (2) имеем

$$Q(x_0 + th_0) - Q(x_0) = t\langle Dx_0 + c, h_0\rangle = t\langle c, h_0\rangle.$$

Это противоречит ограниченности снизу функции $Q(x)$ на $\mathbb{R}^N$.

Решение системы (5) и будет точкой минимума $Q(x)$ на $\mathbb{R}^N$. $\square$

Перейдём к более сложной задаче

$$\begin{gathered} Q(x) := \tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \inf, \\ A[M,N] \times x[N] = b[M]. \end{gathered} \tag{6}$$

Множество планов этой задачи обозначим ω.

ЛЕММА 2. *Если $\omega \neq \varnothing$ и квадратичная функция $Q(x)$ ограничена снизу на ω, то задача* (6) *имеет решение.*

Доказательство. Обозначим

$$\omega_0 = \{h \in \mathbb{R}^N \mid Ah = \mathbb{O}\}.$$

Возьмём $x_0 \in \omega$. Тогда $x_0 + th \in \omega$ при всех $h \in \omega_0$ и $t \in \mathbb{R}$.

Функция $Q(x_0 + th)$ как функция от t ограничена снизу. Отсюда и из (2) следует, что $\langle Dh, h\rangle \geqslant 0$ при всех $h \in \omega_0$. Согласно (3)

$$Q(x+h) - Q(x) \geqslant \langle Dx + c, h\rangle \quad \text{для всех } x \in \omega \text{ и } h \in \omega_0.$$

Покажем, что существует пара $\{x_*, u_*\}$, где $x_* \in \omega$, такая, что

$$Dx_* + c = A^T u_*.$$

В этом случае x_* будет точкой минимума функции $Q(x)$ на ω.

Собственно, нужно установить, что система линейных уравнений

$$\begin{aligned} Dx - A^T u &= -c \\ -Ax \qquad &= -b \end{aligned} \tag{7}$$

имеет решение. Допустим противное. Тогда найдутся векторы $h_0 \in \mathbb{R}^N$ и $v_0 \in \mathbb{R}^M$ со свойствами

$$Dh_0 - A^T v_0 = \mathbb{O}, \qquad Ah_0 = \mathbb{O}, \qquad \langle c, h_0\rangle + \langle b, v_0\rangle \neq 0.$$

Согласно (2) при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} Q(x_0 + th_0) - Q(x_0) &= t\big[\langle Dx_0, h_0\rangle + \langle c, h_0\rangle\big] + \tfrac{1}{2}\, t^2 \langle A^T v_0, h_0\rangle = \\ &= t\big[\langle c, h_0\rangle + \langle x_0, Dh_0\rangle\big] = t\big[\langle c, h_0\rangle + \langle b, v_0\rangle\big]. \end{aligned}$$

Это противоречит ограниченности снизу функции $Q(x)$ на ω.

Таким образом, задача минимизации $Q(x)$ на ω в условиях леммы сводится к решению системы (7). □

4°. Обратимся к выпуклому многогранному множеству Ω, определяемому векторным неравенством

$$A[M,N] \times x[N] \geqslant b[M].$$

Нам потребуются некоторые структурные свойства Ω.

Обозначим $\Delta(x) = Ax - b$. Каждому индексному множеству $I \subset M$ сопоставим подмножество множества Ω вида

$$\Omega(I) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^N \bigm| \Delta(x)[i] = 0 \text{ при } i \in I; \quad \Delta(x)[i] > 0 \text{ при } i \in M \setminus I\bigr\},$$

называемое *гранью* Ω (случай $I = \varnothing$ не исключается). Пусть Γ — множество тех I, которые порождают *непустые* грани $\Omega(I)$. Ясно, что $\Omega(I) \cap \Omega(I') = \varnothing$ при $I \neq I'$ и

$$\Omega = \bigcup_{I \subset \Gamma} \Omega(I). \tag{8}$$

Зафиксируем $I_0 \in \Gamma$. Множества

$$\partial\Omega(I_0) = \bigcup_{I \supset I_0,\ I \neq I_0} \Omega(I),$$

$$\omega(I_0) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid \Delta(x)[i] = 0 \text{ при } i \in I_0\bigr\}$$

называются соответственно *относительной границей* и *аффинной оболочкой* грани $\Omega(I_0)$. Если $\varnothing \in \Gamma$, то по определению $\omega(\varnothing) = \mathbb{R}^N$.

ПРИМЕР. Рассмотрим на плоскости множество Ω, определяемое неравенствами $x_1 \geqslant 0,\ -x_1 \geqslant -1,\ x_2 \geqslant 0$ (см. рис.).

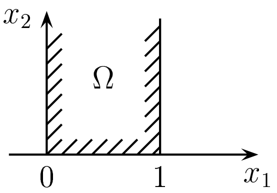

Рис.

Это множество имеет восемь граней

$$\begin{aligned}
&\Omega_0 = \{x \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 > 0\}, && \Omega_{1,2} = \{x \mid x_1 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 > 0\},\\
&\Omega_1 = \{x \mid x_1 = 0,\ x_2 > 0\}, && \Omega_{1,3} = \{x \mid x_1 = 0,\ x_2 = 0\},\\
&\Omega_2 = \{x \mid x_1 = 1,\ x_2 > 0\}, && \Omega_{2,3} = \{x \mid x_1 = 1,\ x_2 = 0\},\\
&\Omega_3 = \{x \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}, && \Omega_{1,2,3} = \{x \mid x_1 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0\},
\end{aligned}$$

две из которых ($\Omega_{1,2}$ и $\Omega_{1,2,3}$) пустые.

Относительная граница грани Ω_3 состоит из двух точек $(0,0)$ и $(1,0)$ (грани $\Omega_{1,3}$ и $\Omega_{2,3}$), а аффинной оболочкой является ось $x_2 = 0$.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\omega(I_0) = \Omega(I_0) \cup \partial\Omega(I_0) \cup \bigl(\omega(I_0) \setminus \Omega\bigr). \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим множество из правой части равенства (9) через G. Проверим включение $\omega(I_0) \subset G$.

Пусть $x_0 \in \omega(I_0)$, так что $\Delta(x_0)[i] = 0$ при $i \in I_0$. Если при этом $\Delta(x_0)[i] > 0$ при $i \in M \setminus I_0$, то $x_0 \in \Omega(I_0)$. Если $\Delta(x_0)[i] \geqslant 0$ при $i \in M \setminus I_0$, причём хотя бы один раз неравенство выполняется как равенство, то $x_0 \in \partial\Omega(I_0)$. Наконец, если $\Delta(x_0)[i] < 0$ при некотором $i \in M \setminus I_0$, то $x_0 \in \omega(I_0) \setminus \Omega$. Получили, что $x_0 \in G$. Включение $\omega(I_0) \subset G$ установлено.

Обратное включение $G \subset \omega(I_0)$ очевидно. □

ЛЕММА 4 (об относительной границе)**.** *Пусть $x_0 \in \Omega(I_0)$, $x_1 \in \omega(I_0) \setminus \Omega$. Тогда на интервале (x_0, x_1) найдётся точка $\hat{x}$, принадлежащая $\partial\Omega(I_0)$.*

Доказательство. Обозначим $x(t) = tx_1 + (1-t)x_0$. Согласно определению $\Delta(x)$,

$$\Delta\big(x(t)\big) = t\Delta(x_1) + (1-t)\Delta(x_0). \tag{10}$$

В силу выбора x_0 и x_1 при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\Delta\big(x(t)\big)[i] = 0, \quad i \in I_0.$$

Покажем, что существует $\hat{t} \in (0,1)$, на котором

$$\Delta\big(x(\hat{t})\big)[i] \geqslant 0, \quad i \in M \setminus I_0,$$

причём хотя бы один раз неравенство выполняется как равенство. Соответствующая точка $\hat{x} = x(\hat{t})$ будет требуемой.

На множестве индексов $\big\{i \in M \setminus I_0 \mid \Delta(x_1)[i] \geqslant 0\big\}$ согласно (10) при всех $t \in (0,1)$ выполняется строгое неравенство $\Delta\big(x(t)\big)[i] > 0$. Вместе с тем, условие $x_1 \in \omega(I_0) \setminus \Omega$ гарантирует, что множество $J_1 = \big\{i \in M \setminus I_0 \mid \Delta(x_1)[i] < 0\big\}$ непусто. Для $i \in J_1$ неравенство

$$\Delta\big(x(t)\big)[i] := \Delta(x_0)[i] - t\big(\Delta(x_0)[i] - \Delta(x_1)[i]\big) \geqslant 0$$

равносильно следующему

$$t \leqslant \frac{\Delta(x_0)[i]}{\Delta(x_0)[i] - \Delta(x_1)[i]}.$$

Положим

$$\hat{t} = \min_{i \in J_1} \frac{\Delta(x_0)[i]}{\Delta(x_0)[i] - \Delta(x_1)[i]}. \tag{11}$$

Ясно, что $\hat{t} \in (0,1)$. Точка $\hat{x} = x(\hat{t})$ — требуемая. Для неё $\Delta(\hat{x})[i] \geqslant 0$ при всех $i \in M \setminus I_0$ и $\Delta(\hat{x})[i] = 0$ на индексе $i \in J_1$, на котором достигается минимум в (11).

Лемма доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если* $\Omega(I_0) \neq \varnothing$*, но* $\partial\Omega(I_0) = \varnothing$*, то и* $\omega(I_0) \setminus \Omega = \varnothing$*.*

В этом случае, согласно (9), $\Omega(I_0) = \omega(I_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. *Если* $\Omega(I_0) \neq \varnothing$ *и* $\partial\Omega(I_0) \neq \varnothing$*, то и* $\omega(I_0) \setminus \Omega \neq \varnothing$*.*

Действительно, возьмём $x_0 \in \Omega(I_0)$ и $y_0 \in \partial\Omega(I_0)$, так что $\Delta(y_0)[i_1] = 0$ при некотором $i_1 \in M \setminus I_0$. Рассмотрим прямую $y(t) = ty_0 + (1-t)x_0$, проходящую через точки x_0 и y_0. Ясно, что $y(t) \in \omega(I_0)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Вместе с тем,

$$\Delta\bigl(y(t)\bigr)[i_1] = (1-t)\Delta(x_0)[i_1] < 0 \quad \text{при } t > 1.$$

Следовательно $y(t) \in \omega(I_0) \setminus \Omega$ при $t > 1$.

5°. Переходим к доказательству теоремы. Обозначим

$$\mu = \inf_{x\in\Omega} Q(x).$$

Согласно (8)

$$\mu = \min_{I\in\Gamma} \inf_{x\in\Omega(I)} Q(x). \tag{12}$$

Среди тех I, на которых достигается минимум в (12), выберем I с *наибольшим* количеством элементов. Обозначим его I_0. Имеем

$$\inf_{x\in\Omega(I_0)} Q(x) = \mu. \tag{13}$$

Предположим вначале, что $\partial\Omega(I_0) = \varnothing$. В этом случае, по следствию из леммы 4, $\Omega(I_0) = \omega(I_0)$, так что

$$\inf_{x\in\omega(I_0)} Q(x) = \mu.$$

На основании леммы 2 (или леммы 1 при $I_0 = \varnothing$) заключаем, что существует точка $x_* \in \omega(I_0)$, в которой $Q(x_*) = \mu$. По определению μ точка x_* — оптимальный план задачи (1).

Пусть $\partial\Omega(I_0) \neq \varnothing$. Обозначим

$$\mu' = \inf_{x\in\partial\Omega(I_0)} Q(x). \tag{14}$$

По определению относительной границы

$$\mu' = \min_{I\supset I_0,\, I\neq I_0} \inf_{x\in\Omega(I)} Q(x).$$

Очевидно, что $\mu' \geqslant \mu$. На самом деле, $\mu' > \mu$, ибо иначе (при $\mu' = \mu$) нашлась бы грань $\Omega(I_1)$ с $|I_1| > |I_0|$, на которой

$$\inf_{x \in \Omega(I_1)} Q(x) = \mu' = \mu.$$

Но это противоречит выбору I_0.

Итак, $\mu' > \mu$. Отсюда и из (13) следует, в частности, что существует точка $x_0 \in \Omega(I_0)$, в которой

$$Q(x_0) < \mu'. \tag{15}$$

Рассмотрим аффинную оболочку $\omega_0 = \omega(I_0)$ грани $\Omega(I_0)$. Покажем, что

$$\inf_{x \in \omega_0} Q(x) = \mu. \tag{16}$$

Предварительно установим неравенство

$$Q(x) > \mu' \quad \forall\, x \in \omega_0 \setminus \Omega. \tag{17}$$

Зафиксируем $x_1 \in \omega_0 \setminus \Omega$ (по замечанию к лемме 4 множество $\omega_0 \setminus \Omega$ непусто). Согласно лемме 4 на интервале (x_0, x_1) существует точка $\hat{x} = \hat{t}x_1 + (1 - \hat{t})x_0$, $\hat{t} \in (0, 1)$, принадлежащая $\partial\Omega(I_0)$. Воспользуемся формулой (4) и неотрицательной определённостью матрицы D на $\mathbb{R}^N$. Запишем

$$Q(\hat{x}) = Q\big(x_0 + \hat{t}(x_1 - x_0)\big) \leqslant Q(x_0) + \hat{t}[Q(x_1) - Q(x_0)] = \hat{t}Q(x_1) + (1 - \hat{t})Q(x_0).$$

На основании определения μ' и (15) получим

$$\mu' \leqslant Q(\hat{x}) < \hat{t}Q(x_1) + (1 - \hat{t})\mu'.$$

Отсюда следует, что $Q(x_1) > \mu'$. Неравенство (17) установлено. Оно гарантирует, что

$$\inf_{x \in \omega_0 \setminus \Omega} Q(x) \geqslant \mu'. \tag{18}$$

В силу леммы 3

$$\inf_{x \in \omega_0} Q(x) = \min\big\{ \inf_{x \in \Omega(I_0)} Q(x),\ \inf_{x \in \partial\Omega(I_0)} Q(x),\ \inf_{x \in \omega_0 \setminus \Omega} Q(x) \big\}.$$

Соотношения (13), (14), (18) и неравенство $\mu' > \mu$ приводят к (16).

По лемме 2 (или лемме 1 при $I_0 = \varnothing$) существует точка $x_* \in \omega_0$, в которой $Q(x_*) = \mu$. Соотношения (14) и (18) указывают, что необходимо $x_* \in \Omega(I_0)$. Значит, x_* — оптимальный план задачи (1).

Теорема доказана. □

6°. Теорема имеет конструктивный характер. Она определяет путь решения задачи (1). Нужно минимизировать квадратичную функцию $Q(x)$ на аффинных множествах вида

$$\omega(I) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid A[I,N] \times x[N] = b[I]\bigr\}$$

при всех $I \subset M$ (не забывая $I = \varnothing$). Это сводится к решению систем линейных уравнений вида (7) (или (5) при $I = \varnothing$). Нас интересуют решения, принадлежащие Ω. То из них, на котором $Q(x)$ принимает наименьшее значение, и будет оптимальным планом задачи (1).

7°. Вопрос о существовании решения у задачи квадратичного программирования рассматривался также в работах [3, 4]. Численным методам квадратичного программирования посвящена книга [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Основы теории квадратичного программирования* // Вестник ЛГУ. 1980. № 1. С. 9–16.

2. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

3. Frank M., Wolfe P. *An algorithm for quadratic programming* // Naval Res. Logist. Quart. 1956. V. 3. No. 1-2. P. 95–110.

4. Eaves B. C. *On quadratic programming* // Manag. Sci. 1971. V. 17. No. 11. P. 698–711.

5. Даугавет В. А. *Численные методы квадратичного программирования.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 128 с.