ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

25 апреля 2009 г.

В докладах [1] и [2] было показано, что билинейная и дискретная поверхности Кунса обладают экстремальными свойствами, выделяющими их среди других поверхностей, удовлетворяющих определённым граничным условиям. В данном докладе будет установлено, что при некоторых предположениях экстремальным свойством обладает и обобщённая поверхность Кунса.

1°. Напомним определение обобщённой поверхности Кунса, данное в [3].

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \dots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \dots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : m. \tag{1}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \dots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \dots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n.$$

Функции H_i^u, H_j^v называются *смешивающими функциями.*

Пусть s — натуральное число. Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \Big\{ \mathbf{g} \colon D_u \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^s(u)\big),\ g^k \in T_u \Big\},$$

$$\mathbf{T}_v = \Big\{ \mathbf{f} \colon D_v \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \dots, f^s(v)\big),\ f^k \in T_v \Big\}.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Введём линейные операторы

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \dots, L_i^u(g^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \dots, g^s(u)\big) \in \mathbf{T}_u,\ i \in 1:m;$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \dots, L_j^v(f^s)\big) \ \text{ для } \ \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \dots, f^s(u)\big) \in \mathbf{T}_v,\ j \in 1:n.$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n.$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{c} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^n H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{2}$$

Поверхность, определяемая вектор-функцией $\mathbf{c}(u,v)$, называется *обобщённой поверхностью Кунса*. В [3] доказано, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}_i^u(\mathbf{c}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), && i \in 1:m, && v \in D_v, \\ &\mathbf{L}_j^v(\mathbf{c}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), && j \in 1:n, && u \in D_u. \end{aligned} \tag{3}$$

2°. В [1] отмечалось, что билинейная поверхность Кунса минимизирует интеграл

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \big\|\mathbf{a}_{uv}(u,v)\big\|^2 du\,dv$$

на множестве всех поверхностей, удовлетворяющих граничным условиям. В [2] установлено, что дискретная поверхность Кунса минимизирует сумму

$$\sum_{u=0}^{N_1-1} \sum_{v=0}^{N_2-1} \big\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\big\|^2$$

на множестве всех поверхностей, проходящих через опорные кривые. Мы будем рассматривать общий случай, когда в целевой функции вместо операций интегрирования и суммирования по периоду будут использоваться некоторые линейные функционалы, а вместо операций дифференцирования и вычисления конечной разности — некоторые линейные операторы. В качестве ограничений будут выступать условия (3). Целью данного доклада является доказательство того, что обобщённая поверхность Кунса доставляет единственный минимум в такой экстремальной задаче при определённых предположениях относительно используемых в целевой функции функционалов и операторов. Основные предположения будут связаны с экстремальными задачами для функций одной переменной, заданных на множествах D_u и D_v. Аналогом этих предположений в дискретном случае является свойство минимальной нормы для дискретных интерполяционных сплайнов.

Пусть I_u, I_v — некоторые линейные функционалы на пространствах T_u и T_v соответственно. В дискретном случае

$$I_u\, g = \sum_{u=0}^{N_1-1} g(u), \qquad I_v\, f = \sum_{v=0}^{N_2-1} f(v).$$

Предположим, что для любой неотрицательной функции g из T_u значение $I_u\, g$ неотрицательно и обращается в нуль только для $g = 0$. Аналогично, пусть для любой неотрицательной функции f из T_v значение $I_v\, f$ неотрицательно и обращается в нуль только для $f = 0$. Кроме того, предположим, что пространства T_u и T_v замкнуты относительно умножения функций.

Пусть заданы линейные пространства E_u и E_v — подпространства T_u и T_v соответственно, причём

$$\begin{aligned} H_i^u &\in E_u, \qquad i \in 1:m, \\ H_j^v &\in E_v, \qquad j \in 1:n. \end{aligned}$$

Пусть на этих пространствах определены линейные операторы

$$A_u\colon E_u \to T_u, \qquad A_v\colon E_v \to T_v.$$

В дискретном случае $A_u\, g = \Delta^{r_1} g$, $A_v\, f = \Delta^{r_2} f$.

Прежде чем перейти к рассмотрению экстремальной задачи для вектор-функции двух переменных, обратимся к экстремальной задаче для функции одной переменной. В [4, с. 23] показано, что дискретный интерполяционный сплайн является решением некоторой экстремальной задачи. Опишем аналог этой задачи в общем случае.

Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — произвольные вещественные числа. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &G(g) := I_u\,(A_u\, g)^2 \to \inf, \\ &L_i^u\, g = z_i, \quad i \in 1:m, \\ &g \in E_u. \end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что в силу равенств (1) функция

$$g_*(u) := \sum_{i=1}^{m} z_i\, H_i^u(u) \tag{5}$$

удовлетворяет ограничениям задачи (4).

В дискретном случае задача (4) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{u=0}^{N_1-1} \bigl(\Delta^{r_1} g(u)\bigr)^2 \to \inf, \\ &g(in_1) = z_i, \quad i \in 1:m_1; \\ &g \in \mathbb{C}_{N_1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $N_1 = m_1\, n_1$. В [4] показано, что единственным решением задачи (6) является интерполяционный сплайн. Если, следуя [2], в качестве смешивающих функций взять фундаментальные интерполяционные сплайны, определяемые соотношениями

$$H_i^u(jn_1) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1:m_1,$$

то функция $g_*(u)$ совпадёт с интерполяционным сплайном. Таким образом, в дискретном случае единственным решением задачи (4) является функция $g_*(u)$. Предположим, что и в общем случае смешивающие функции $H_i^u(u)$ подобраны таким образом, что функция $g_*(u)$ является единственным решением задачи (4). Это основное предположение. Опишем критерий, облегчающий проверку того, что это предположение выполняется для заданных функций $H_i^u(i)$.

Определим множества K_u и K_v как множества функций, на которых обращаются в нуль все функционалы L_i^u и L_j^v соответственно:

$$K_u = \bigcap_{i=1}^{m} \ker L_i^u, \qquad K_v = \bigcap_{j=1}^{n} \ker L_j^v.$$

ТЕОРЕМА 1. *Функция вида* (5) *является единственным решением экстремальной задачи* (4) *для любого набора* $\{z_i\}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$I_u\Bigl(\bigl(A_u\, H_i^u\bigr)\,(A_u\, x)\Bigr) = 0 \quad \text{для } x \in E_u \cap K_u, \quad i \in 1:m; \tag{7}$$

$$K_u \cap \ker A_u = \{0\}. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем произвольное число $i \in 1:m$ и функцию x из множества $E_u \cap K_u$ не равную тождественно нулю. Положим $z_j = \delta_{ij}$ для $j \in 1:m$. В этом случае функция g_* совпадает с H_i^u, поэтому функция $H_i^u(u)$ является единственным решением экстремальной задачи (4).

Определим для любого вещественного t функцию g_t по формуле

$$g_t(u) = H_i^u(u) + t\,x(u).$$

В силу линейности функционала I_u и оператора A_u имеем

$$G(g_t) = G(H_i^u + t\,x) = I_u\left[(A_u\,H_i^u)^2 + 2\,t\,(A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x) + t^2\,(A_u\,x)^2\right] =$$
$$= G(H_i^u) + 2\,t\,I_u\big((A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x)\big) + t^2\,G(x).$$

Ясно, что g_t удовлетворяет ограничениям задачи (4) для любого t. А так как $g_0 = H_i^u$, то единственный минимум функции $G(g_t)$ достигается при $t = 0$. Но $G(g_t)$ представляет собой квадратный трёхчлен, поэтому коэффициент при t равен нулю, а коэффициент при t^2 положителен. Следовательно, условие (7) выполнено для всех ненулевых функций x. Для функции $x(u) \equiv 0$ оно, очевидно, также выполняется.

Проверим условие (8), действуя от противного. Пусть найдётся функция x из множества $K_u \cap \ker A_u$, не равная тождественно нулю. Тогда $A_u\,x = 0$, следовательно, $G(x) = 0$. Но мы доказали, что $G(x)$ положительно. Полученное противоречие доказывает свойство (8). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $g_*(u)$ — функция, определяемая формулой (5), а $g(u)$ — произвольная функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (4). Положим $x(u) = g(u) - g_*(u)$. Ясно, что $x \in K_u \cap E_u$. Используя линейность функционала I_u и оператора A_u, а также равенство (7), получаем

$$G(g) = G(g_* + x) = I_u\left[(A_u\,g_*)^2 + 2\,(A_u\,g_*)\,(A_u\,x) + (A_u\,x)^2\right] =$$
$$= G(g_*) + G(x) + I_u\big((A_u\,H_i^u)\,(A_u\,x)\big) = G(g_*) + G(x).$$

Таким образом, $G(g) \geqslant G(g_*)$, что гарантирует оптимальность плана g_* в задаче (4).

Проверим единственность. Пусть $G(g) = G(g_*)$. Тогда $G(x) = 0$, поэтому $A_u\,x = 0$, то есть $x \in \ker A_u$. Значит, по условию (8) получаем, что $x = 0$, то есть $g = g_*$. Теорема доказана. □

Аналогичным образом можно определить экстремальную задачу для функций пространства E_v. Предположим, что и в этой задаче единственным решением является линейная комбинация смешивающих функций. Таким образом, выполняются условия

$$
\begin{aligned}
&I_u\left(\left(A_u H_i^u\right)\left(A_u x\right)\right)=0 \quad \text{для } x \in E_u \cap K_u, \quad i \in 1:m; \\
&I_v\left(\left(A_v H_j^v\right)\left(A_v y\right)\right)=0 \quad \text{для } y \in E_v \cap K_v, \quad j \in 1:n;
\end{aligned} \tag{9}
$$

и

$$
K_u \cap \ker A_u=\{0\}, \qquad K_v \cap \ker A_v=\{0\}. \tag{10}
$$

Эти предположения являются основными условиями, которые будут требоваться в теореме об экстремальном свойстве обобщённой поверхности Кунса.

3°. Распространим введённые функционалы и операторы на функции двух переменных. Пусть заданы некоторые линейные пространства T_{uv} и E_{uv}, элементами которых являются вещественные функции над $D_u \times D_v$, причём выполняются условия

$$
\begin{aligned}
&a(\cdot, v) \in T_u, \quad a(u, \cdot) \in T_v \quad \text{для } a \in T_{uv}, \\
&a(\cdot, v) \in E_u, \quad a(u, \cdot) \in E_v \quad \text{для } a \in E_{uv}.
\end{aligned}
$$

Определим для $a \in T_{uv}$ функцию $I_{u,*}\, a$ формулой

$$
\big(I_{u,*}\, a\big)(v)=I_u\left(a(\cdot, v)\right), \qquad v \in D_v.
$$

Таким образом, $I_{u,*}$ является отображением, которое сопоставляет каждой функции из T_{uv} некоторую функцию над множеством D_v. Ясно, что $I_{u,*}$ является линейным оператором. В дальнейшем для краткости будем опускать скобки в выражениях вида $\big(I_{u,*}\, a\big)(v)$, предполагая, что сначала оператор применяется к функции, а потом вычисляется значение полученной функции на заданном аргументе.

Аналогичным образом определим линейные операторы $I_{*,v}$, $L_i^{u,*}$ и $L_j^{*,v}$:

$$
\begin{aligned}
I_{*,v}\, a(u) &= I_v\big(a(u, \cdot)\big), && u \in D_u, \\
L_i^{u,*}\, a(v) &= L_i^u\big(a(\cdot, v)\big), && v \in D_v, \\
L_j^{*,v}\, a(u) &= L_j^v\big(a(u, \cdot)\big), && u \in D_u.
\end{aligned}
$$

Далее, положим

$$
\begin{aligned}
A_{u,*}\, a(u, v) &= A_u\left(a(\cdot, v)\right)(u), \\
A_{*,v}\, a(u, v) &= A_v\left(a(u, \cdot)\right)(v).
\end{aligned}
$$

Оператор $A_{u,*}$ определён на тех $a(u, v)$ из пространства T_{uv}, для которых $a(\cdot, v)$ принадлежит E_u, а оператор $A_{u,*}$ — на тех $a(u, v)$, для которых $a(u, \cdot)$ принадлежит E_v.

ЛЕММА 1. *Если функция $a(u,v)$ из пространства E_{uv} имеет вид*

$$a(u,v) = g(u)\, f(v),$$

где $g \in E_u$, $f \in E_v$, то выполняется тождество

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, a(u,v) = \big(A_u\, g(u)\big)\, \big(A_v\, f(v)\big).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное u из D_u. По определению оператора $A_{*,v}$ имеем

$$A_{*,v}\, a(u,\cdot) = A_v\, \big(a(u,\cdot)\big) = A_v\, \big(g(u)\, f\big) = g(u)\, A_v\, f.$$

Зафиксируем произвольное v из D_v. Используя определение оператора $A_{u,*}$, получаем

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, a(\cdot,v) = A_u\, \big(A_{*,v}\, a(\cdot,v)\big) = A_u\, \big(g\, A_v\, f(v)\big) = \big(A_v\, f(v)\big)\, (A_u\, g),$$

что и требовалось. $\square$

ЛЕММА 2. *Если функция $a(u,v)$ из пространства T_{uv} имеет вид*

$$a(u,v) = g(u)\, b(u,v),$$

где $g \in T_u$, $b \in T_{uv}$, то выполняется тождество

$$I_{*,v}\, a = g\, I_{*.v}\, b.$$

Аналогично, если функция $a(u,v)$ из пространства T_{uv} имеет вид

$$a(u,v) = f(v)\, b(u,v),$$

где $f \in T_v$, $b \in T_{uv}$, то справедливо равенство

$$I_{u,*}\, a = f\, I_{u,*}\, b.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное u из D_u. По определению оператора $I_{*,v}$ имеем

$$I_{*,v}\, a(u) = I_v\, \big(a(u,\cdot)\big) = I_v\, \big(g(u)\, b(u,\cdot)\big) =$$
$$= g(u)\, I_v\, \big(b(u,\cdot)\big) = g(u)\, I_{*,v}\, b(u),$$

что и требовалось. Вторая часть леммы доказывается аналогичным образом. $\square$

Введённые выше операторы действуют на одну из переменных при фиксированной второй. Поэтому естественно предположить, что операторы, действующие на разные переменные, коммутируют друг с другом.

Пусть для всех $a \in T_{uv}$ выполняются условия

$$I_{u,*}\, a \in T_v, \quad I_{*,v}\, a \in T_u \quad \text{и} \quad I_u\, I_{*,v}\, a = I_v\, I_{u,*}\, a. \tag{11}$$

Далее, пусть для всех $a \in E_{uv}$ функция $A_{u,*}a$ принадлежит области определения оператора $A_{*,v}$, функция $A_{*,v}a$ принадлежит области определения оператора $A_{u,*}$ и справедливо тождество

$$A_{u,*}\, A_{*,v}\, a = A_{*,v}\, A_{u,*}\, a. \tag{12}$$

Кроме того, пусть для всех $a \in E_{uv}$ выполняются условия

$$\begin{aligned} &L_i^{u,*}\, a \in E_v, \qquad A_v\, L_i^{u,*}\, a = L_i^{u,*}\, A_{*,v}\, a, \qquad i \in 1:m, \\ &L_j^{*,v}\, a \in E_u, \qquad A_u\, L_j^{*,v}\, a = L_j^{*,v}\, A_{u,*}\, a, \qquad j \in 1:n. \end{aligned} \tag{13}$$

ЛЕММА 3. *Пусть функция b из пространства T_{uv} неотрицательна. Тогда $I_u\, I_{*,v}\, b \geqslant 0$, причём равенство достигается только для $b = 0$.*

Доказательство. Для произвольного u из D_u имеем

$$I_{*,v}\, b(u) = I_v\, \big(b(u,\cdot)\big) \geqslant 0,$$

то есть $I_{*,v}\, b \geqslant 0$. Следовательно, $I_u\, I_{*,v}\, b \geqslant 0$.

Если же достигается равенство $I_u\, I_{*,v}\, b = 0$, то $I_{*,v}\, b = 0$. Поэтому для всех u из D_u выполняется $I_v\, \big(b(u,\cdot)\big) = 0$, что влечёт $b(u,\cdot) \equiv 0$. $\square$

Определим множество K_{uv} как множество функций из E_{uv}, на которых обращаются в нуль все операторы $L_i^{u,*}$, $L_j^{*,v}$:

$$K_{uv} = E_{uv} \cap \bigcap_{i=1}^{m} \ker L_i^{u,*} \;\cap\; \bigcap_{j=1}^{n} \ker L_j^{*,v}.$$

ЛЕММА 4. *Если выполнены условия* (9), *то для любой функции η из множества K_{uv} справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &I_{u,*}\, \big((A_u\, H_i^u)\, (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)\big) = 0, \qquad i \in 1:m, \\ &I_{*,v}\, \big((A_v\, H_j^v)\, (A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta)\big) = 0, \qquad j \in 1:n. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное v из D_v. Согласно определению $I_{u,*}$ имеем

$$I_{u,*}\left[(A_u\, H_i^u)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\,\eta)\right](v) = I_u\left[(A_u\, H_i^u)\,\big((A_{u,*}\, A_{*,v}\,\eta)(\cdot,v)\big)\right] = \\ = I_u\,\big((A_u\, H_i^u)\,(A_u\, x)\big),$$

где $x(u) = A_{*,v}\,\eta(u,v)$.

По определению $L^{u,*}$ и свойству (13) получим, что для любого $k \in 1:m$

$$L_k^u\, x = L_k^u\,\big(A_{*,v}\,\eta(\cdot,v)\big) = (L_k^{u,*}\, A_{*,v}\,\eta)(v) = (A_v\, L_k^{u,*}\,\eta)(v) = 0.$$

Таким образом, $x \in K_u$. По свойству (12) функция $A_{*,v}\,\eta$ принадлежит области определения оператора $A_{u,*}$, следовательно, $x \in E_u$.

Итак, $x \in E_u \cap K_u$, поэтому по свойству (9)

$$I_{u,*}\,\big((A_u\, H_i^u)\,(A_{u,*}\, A_{*,v}\,\eta)\big) = I_u\,\big((A_u\, H_i^u)\,(A_u\, x)\big) = 0.$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

ЛЕММА 5. *Пусть справедливы условия* (10) *и для функции* η *из множества* K_{uv} *выполняется равенство*

$$I_u\, I_{*,v}(A_{u,*}\, A_{*,v}\,\eta)^2 = 0.$$

Тогда $\eta = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3 следует, что $A_{u,*}\, A_{*,v}\,\eta = 0$. Положим $\mu = A_{*,v}\,\eta$.

Зафиксируем произвольное v из D_v. По определению оператора $A_{u,*}$ имеем

$$A_u\,\big(\mu(\cdot,v)\big) = A_{u,*}\,\mu(\cdot,v) = 0.$$

Используя свойство (13), получаем для любого $i \in 1:m$

$$L_i^u\,\big(\mu(\cdot,v)\big) = L_i^{u,*}\,\mu(\cdot,v) = L_i^{u,*}\, A_{*,v}\,\eta(\cdot,v) = A_v\, L_i^{u,*}\,\eta(\cdot,v) = 0,$$

так как $L_i^{u,*}\,\eta = 0$.

Таким образом, функция $\mu(\cdot,v)$ принадлежит множеству $\ker A_u$, а также множествам $\ker L_i^u$ при $i \in 1:m$. Значит, по свойству (10), эта функция равна нулю. Следовательно, $A_{*,v}\,\eta = 0$.

Зафиксируем произвольное u из D_u. По определению оператора $A_{*,v}$ имеем

$$A_v\,\big(\eta(u,\cdot)\big) = A_{*,v}\,\eta(u,\cdot) = 0.$$

Для любого $j \in 1:n$ по определению оператора $L_j^{*,v}$ получим

$$L_j^v\big(\eta(u,\cdot)\big) = L_j^{*,v}\,\eta(u,\cdot) = 0,$$

так как $\eta \in K_{uv}$.

Таким образом, функция $\eta(u,\cdot)$ принадлежит множеству $\ker A_v$, а также множествам $\ker L_j^v$ при $j \in 1:n$. Из равенств (10) следует, что $\eta(u,\cdot)=0$, что и требовалось. □

Положим

$$\mathbf{E}_{uv} = \Big\{\mathbf{a}\colon D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s \;\Big|\; \mathbf{a}(u,v) = \big(a^1(u,v),\dots,a^s(u,v)\big),\ a^k \in E_{uv}\Big\},$$

и определим векторные варианты операторов $A_{u,*}$ и $A_{*,v}$:

$$\mathbf{A}_{u,*}(\mathbf{a}) = \big(A_{u,*}(a^1),\dots,A_{u,*}(a^s)\big) \quad \text{для} \;\; \mathbf{a}(u,v) = \big(a^1(u,v),\dots,a^s(u,v)\big);$$
$$\mathbf{A}_{*,v}(\mathbf{a}) = \big(A_{*,v}(a^1),\dots,A_{*,v}(a^s)\big) \quad \text{для} \;\; \mathbf{a}(u,v) = \big(a^1(u,v),\dots,a^s(u,v)\big).$$

Сформулируем экстремальную задачу для обобщённой поверхности Кунса.

$$\begin{gathered}
F(\mathbf{a}) := I_u\, I_{*,v}\, \big\|\mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\mathbf{a}\big\|^2 \to \inf,\\
\mathbf{L}_i^u(\mathbf{a}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \qquad v \in D_v,\\
\mathbf{L}_j^v(\mathbf{a}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \qquad u \in D_u,\\
\mathbf{a} \in \mathbf{E}_{uv}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Предположим, что обобщённая поверхность Кунса, построенная по формуле (2), принадлежит пространству $\mathbf{E}_{uv}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены условия* (9), (10), (11), (12) *и* (13), *то вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *определяемая формулой* (2), *является единственным решением экстремальной задачи* (14).

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}(u,v)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (14), а $\mathbf{c}(u,v)$ — поверхность Кунса, построенная по формуле (2). Положим $\boldsymbol{\eta}(u,v) = \mathbf{a}(u,v) - \mathbf{c}(u,v)$. Через $c^d(u,v)$, $\eta^d(u,v)$, $f_i^d(v)$, $g_j^d(u)$ будем обозначать координаты с индексом d векторов $\mathbf{c}(u,v)$, $\boldsymbol{\eta}(u,v)$, $\mathbf{f}_i(v)$ и $\mathbf{g}_j(u)$ соответственно. По построению η^d принадлежит K_{uv}. В силу линейности операторов $\mathbf{A}_{u,*}$, $\mathbf{A}_{*,v}$, $I_{*,v}$ и функционала I_u имеем

$$\begin{gathered}
F(\mathbf{a}) = I_u\, I_{*,v}\, \|\mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\mathbf{c} + \mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\boldsymbol{\eta}\|^2 =\\
= F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2\, I_u\, I_{*,v}\, \big\langle \mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\mathbf{c}, \mathbf{A}_{u,*}\,\mathbf{A}_{*,v}\,\boldsymbol{\eta}\big\rangle =\\
= F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta}) + 2\sum_{d=1}^{s} l^d(c^d),
\end{gathered}$$

где $l^d(c^d) = I_u\, I_{*,v}\left(\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, c^d\right)\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)\right)$. Формулу (2) для координаты с индексом d можно переписать в виде

$$c^d(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, f_i^d(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u), \tag{15}$$

где $\widehat{g}_j^d(u) = g_j^d(u) - \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\, L_i^u(g_j^d)$.

Используя свойство (11) и леммы 1, 2 и 4, получаем для любого $i \in 1:m$

$$l^d\left(H_i^u(u)\, f_i^d(v)\right) = I_v\, I_{u,*}\left(\left(A_u\, H_i^u\right)\left(A_v\, f_i^d\right)\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)\right) =$$
$$= I_v\left[\left(A_v\, f_i^d\right) I_{u,*}\left(\left(A_u\, H_i^u\right)\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)\right)\right] = 0.$$

Аналогично, для любого $j \in 1:n$ имеем

$$l^d\left(H_j^v(v)\, \widehat{g}_j^d(u)\right) = I_u\, I_{*,v}\left(\left(A_v\, H_j^v\right)\left(A_u\, \widehat{g}_j^d\right)\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)\right) =$$
$$= I_u\left[\left(A_u\, \widehat{g}_j^d\right) I_{*,v}\left(\left(A_v\, H_j^v\right)\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)\right)\right] = 0.$$

Таким образом, отображение l^d обращается в ноль на всех слагаемых выражения (15). Следовательно, в силу линейности, $l^d(c^d) = 0$. Поэтому $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c}) + F(\boldsymbol{\eta})$, а так как F неотрицательно в силу леммы 3, то это гарантирует оптимальность вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ для задачи (14).

Проверим единственность. Предположим, что $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{c})$. Тогда $F(\boldsymbol{\eta}) = 0$, то есть

$$\sum_{d=1}^{s} I_u\, I_{*,v}\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)^2 = 0.$$

Следовательно, для всех d выполнено равенство $I_u\, I_{*,v}\left(A_{u,*}\, A_{*,v}\, \eta^d\right)^2 = 0$, что по лемме 5 влечёт $\eta^d = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{\eta} = 0$, то есть $\mathbf{a} = \mathbf{c}$. Теорема доказана. □

4°. Покажем, как установить экстремальное свойство бикубических поверхностей Кунса, рассмотренных в [5]. В этом случае пространства, функционалы и операторы для переменных u и v определяются одинаково. Положим $D = [0,1]$, $T = C^1(D)$, $m = 4$. Функционалы L_i задаются формулами

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

Смешивающими функциями являются кубические полиномы Эрмита

$$H_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \qquad H_2(t) = t^3 - 2u^2 + t,$$
$$H_3(t) = t^3 - t^2, \qquad H_4(t) = -2t^3 + 3t^2.$$

Пусть
$$E = C^2(D), \qquad I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt, \qquad A(f) = f''.$$
Положим $T_{uv} = C\big([0,1]^2\big)$, $E_{uv} = C^4\big([0,1]^2\big)$. Свойства (11), (12) и (13), очевидно, выполнены. Свойство (9) принимает вид
$$\int_0^1 H_i''(t)\,x''(t)\,dt = 0, \qquad \text{если} \;\; x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0.$$
Так как $H_i(t)$ — полином третьей степени, то $H_i''(t)$ — линейная функция, и для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться правилом интегрирования по частям.

Условие (10) записывается в виде:
$$\text{если} \;\; x''(t) \equiv 0 \quad \text{и} \;\; x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0, \quad \text{то} \;\; x(t) \equiv 0.$$
Это условие также соблюдается.

Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому можно заключить, что бикубическая поверхность Кунса является единственным решением экстремальной задачи
$$\int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial^4 \mathbf{a}}{\partial^2 u\,\partial^2 v}\,(u,v) \right\|^2 du\,dv \to \inf,$$
$$\mathbf{a}(0,v) \equiv \mathbf{f}_1(v), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}\,(0,v) \equiv \mathbf{f}_2(v), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}\,(1,v) \equiv \mathbf{f}_3(v), \quad \mathbf{a}(1,v) \equiv \mathbf{f}_4(v),$$
$$\mathbf{a}(u,0) \equiv \mathbf{g}_1(u), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v}\,(u,0) \equiv \mathbf{g}_2(u), \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v}\,(u,1) \equiv \mathbf{g}_3(u), \quad \mathbf{a}(u,1) \equiv \mathbf{g}_4(u),$$
$$\mathbf{a} \in C^4\big([0,1]^2\big).$$

Справедливость полученного экстремального свойства была показана в [6] непосредственно. Теперь же это свойство получается как частный случай теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Билинейные поверхности Кунса и поверхности Безье* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 ноября 2006 г. (`http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1118`).

2. Чашников Н. В. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`).

3. Чашников Н. В. *Обобщённые и составные поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0315`).

4. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

5. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Бикубические поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 23 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0123`).

6. Игнатов М. И., Певный А. Б. *Натуральные сплайны многих переменных.* Л.: Наука, 1991. 128 с.