ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ПОЛУДИЗАЙНОВ*

Н. О. Котелина — nad7175@yandex.ru
А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

27 мая 2009 г.

Данный доклад является продолжением доклада [1]. Для любого чётного $t \geqslant 2$ и любой системы векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ вводится понятие t-потенциала $P_t(\Phi) = \sum_{i,j=1}^m \big[\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\big]^t$. Доказывается, что минимум t-потенциала достигается на сферических полудизайнах порядка t и только на них. Впервые аналогичное утверждение было установлено Б. Б. Венковым [2]. Даётся обобщение на случай систем Φ, не лежащих на сфере S^{n-1}. Вводятся также потенциалы В. А. Юдина $U_k(\Phi)$, $k = 2, 4, \ldots, t$, и доказывается, что они также достигают минимума на сферических полудизайнах порядка t и только на них.

1°. Обозначения и предварительные сведения. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее t — чётное число, $t \geqslant 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим полудизайном порядка t (или кратко сферическим t-полудизайном), если существует константа $A_t > 0$ такая, что выполнено тождество Варинга

$$\sum_{i=1}^m \big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^t = A_t\, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В докладе [1] последовательным применением оператора Лапласа Δ к обеим частям тождества (1) определена константа A_t. В результате установлено, что $A_t = cm$, где
$$c = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}\,. \tag{2}$$
Попутно показано, что сферический полудизайн порядка t является сферическим полудизайном для всех порядков $k = 2, 4, \ldots, t$.

2°. Сферические дизайны и их связь с полудизайнами. Сферические p-дизайны определили Delsarte, Goethals, Seidel [5] в 1977 г. Это же определение использовалось во многих других работах [3, 6, 12, 13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система точек $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим p-дизайном, если выполнено тождество
$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i) \tag{3}$$
для всех полиномов $Q(x)$ степени не выше p.

Здесь $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы S^{n-1}, порядок p может быть нечётным, а полином $Q(x)$ не обязательно однородный.

В докладе [1] установлена связь между определениями 1 и 2. Если $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический полудизайн чётного порядка t, то
$$\Phi_{2m} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_m\}$$
будет сферическим дизайном порядка $t+1$.

Обратно, пусть множество $\Phi_{2m} \subset S^{n-1}$ является симметричным, т. е. вместе с каждым вектором $\varphi \in \Phi_{2m}$ содержит вектор $-\varphi$. Тогда Φ_{2m} можно представить в виде
$$\Phi_{2m} = \Phi \cup -\Phi, \qquad \Phi \cap -\Phi = \varnothing.$$
Если Φ_{2m} — сферический $(t{+}1)$-дизайн, то Φ будет сферическим полудизайном порядка t.

Следует также отметить, что существуют несимметричные сферические дизайны. Содержательные примеры приведены в работах В. А. Юдина [12, 13].

3°. Неравенство Б. Б. Венкова. Рассмотрим произвольную систему векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1}. Величину
$$P_t(\Phi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bigl[\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\bigr]^t. \tag{4}$$
будем называть t-потенциалом этой системы. При $t = 2$ потенциал $P_2(\Phi)$ называется фреймовым потенциалом. Он был введен в работах [8, 9].

ТЕОРЕМА 1 (Б. Б. Венков [2]). *Для любой системы* $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset \subset S^{n-1}$ *справедливо неравенство*

$$P_t(\Phi) \geqslant c\, m^2, \tag{5}$$

где константа c *определена формулой* (2). *Неравенство* (5) *превращается в равенство на сферических* t*-полудизайнах и только на них.*

В дальнейшем мы обобщим эту теорему на случай неединичных векторов (см. далее теорему 2).

ПРИМЕР. Рассмотрим икосаэдр, вписанный в S^2. Напомним, что икосаэдр имеет 12 вершин. Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ — система из 6 вершин икосаэдра, не содержащая противоположных векторов. Вычислим 4-потенциал $P_4(\Phi)$.

Поскольку $\varphi_i \in S^2$, то $\|\varphi_i\|^2 = 1$, $i \in 1:6$. По теореме Haantjes [6] для вершин икосаэдра выполнены соотношения

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{при } i \neq j.$$

Значит, $P_4(\Phi) = 6 \cdot 1 + 30 \cdot \frac{1}{25} = \frac{36}{5}$. В то же время при $n = 3$, $t = 4$, $m = 6$ имеем

$$c\, m^2 = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5}\, 6^2 = \frac{36}{5}\,.$$

Следовательно, $P_4(\Phi) = cm^2$, так что система Φ является 4-полудизайном. Система $\Phi_{12} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_6, -\varphi_1, \dots, -\varphi_6\}$ всех 12 вершин икосаэдра является сферическим 5-дизайном.

4°. **Несферические полудизайны.** Перейдем к рассмотрению t-полудизайнов в $\mathbb{R}^n$, состоящих из векторов разной длины. Пусть t — четное, $t \geqslant 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система ненулевых векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется t-полудизайном, если существует $A_t > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x \rangle\big]^t = A_t\, \|x\|^t, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. *Пусть* $t \geqslant 4$ *и система* Φ *является* t*-полудизайном. Тогда система векторов*

$$\theta_i = \big\{ \|\varphi_i\|^{2/(t-2)}\, \varphi_i \big\}_{i=1}^{m}$$

является $(t-2)$*-полудизайном с константой*

$$A_{t-2} = A_t\, \frac{t+n-2}{t-1}\,.$$

Доказательство. Применим оператор Лапласа Δ к обеим частям тождества (6). Получим

$$t(t-1)\sum_{i=1}^{m}\bigl[\langle\varphi_i,x\rangle\bigr]^{t-2}\,\|\varphi_i\|^2 = A_t\,t\,(t+n-2)\|x\|^{t-2}, \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Положим $s = t/2$. После $s-1$ применений оператора Δ придем к равенству

$$\sum_{i=1}^{m}\bigl[\langle\varphi_i,x\rangle\bigr]^{2}\,\|\varphi_i\|^{t-2} = A_2\,\|x\|^2, \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Применим ещё раз оператор Δ. Получим

$$2\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|^t = A_2\cdot 2n.$$

Отсюда $A_2 = \mu/n$, где

$$\mu = \sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|^t. \tag{7}$$

Из рекуррентного соотношения (3) и равенства $A_2 = \mu/n$ следует, что $A_t = c\mu$, где c определено формулой (2).

5°. Неравенство для t-потенциала. Как и выше, t-потенциал $P_t(\Phi)$ определяется формулой (4).

ТЕОРЕМА 2. *Для любой системы ненулевых векторов Φ в пространстве $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$P_t(\Phi) \geqslant c\Bigl(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|^t\Bigr)^2, \tag{8}$$

где константа c определяется формулой (2). *Равенство в* (8) *достигается на t-полудизайнах и только на них.*

Для доказательства потребуется некоторая техника, связанная со скалярным произведением в пространстве однородных полиномов $\mathcal{P}_{n,t}$ степени t.

Возьмем два полинома f, $g \in \mathcal{P}_{n,t}$

$$f(x) = \sum_{|i|=t} a(i)\,x^i, \qquad g(x) = \sum_{|i|=t} b(i)\,x^i,$$

где $i=(i_1,\dots,i_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|i|=i_1+\dots+i_n$, $x^i=x_1^{i_1}\,x_2^{i_2}\,\cdots\,x_n^{i_n}$. Введём скалярное произведение

$$[f,\,g]=\sum_{|i|=t}\frac{a(i)\,b(i)}{c(i)}\,,\qquad \text{где } c(i)=\frac{t!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\,.$$

С этим скалярным произведением $\mathcal{P}_{n,t}$ становится гильбертовым пространством. Для любого $\varphi\in\mathbb{R}^n$ введём полином

$$\rho_\varphi(x)=\big[\langle\varphi,x\rangle\big]^t=[\varphi_1\,x_1+\dots+\varphi_n\,x_n]^t.$$

Для любого $\varphi\in\mathbb{R}^n$ и $f\in\mathcal{P}_{n,t}$ легко проверяется равенство

$$[\rho_\varphi,f]=f(\varphi), \tag{9}$$

т. е. $\rho_\varphi(x)$ является воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{P}_{n,t}$. Введём также полином $\omega_t(x)=\|x\|^t$ (по-прежнему t — чётное число, $t\geqslant 2$). В [2] и [3] установлено равенство

$$[\omega_t,\omega_t]=\frac{1}{c}\,, \tag{10}$$

где c — константа вида (2).

Доказательство. Доказательство теоремы 2 следует идее, указанной Венковым Б. Б. [2]. С помощью обозначения μ, введённого в (7), требуемое неравенство перепишется в виде $P_t(\Phi)\geqslant c\mu^2$. Запишем неравенство

$$W:=\Big[\sum_{i=1}^m\rho_{\varphi_i}-c\,\mu\,\omega_t,\ \sum_{j=1}^m\rho_{\varphi_j}-c\,\mu\,\omega_t\Big]\geqslant 0.$$

Отсюда

$$W=W_1-2\,c\,\mu\,W_2+c^2\,\mu^2\,[\omega_t,\omega_t],$$

где

$$W_1=\sum_{i,j=1}^m[\rho_{\varphi_i},\rho_{\varphi_j}],\qquad W_2=\sum_{i=1}^m[\rho_{\varphi_i},\omega_t].$$

В силу (9)

$$W_1=\sum_{i,j=1}^m\rho_{\varphi_j}(\varphi_i)=\sum_{i,j=1}^m\big[\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\big]^t=P_t(\Phi),$$

$$W_2=\sum_{i=1}^m\omega_t(\varphi_i)=\sum_{i=1}^m\|\varphi_i\|^t=\mu.$$

Следовательно, с учетом (10),

$$W = P_t(\Phi) - 2\,c\,\mu^2 + c^2\,\mu^2\,\frac{1}{c} = P_t(\Phi) - c\,\mu^2.$$

Поскольку $W \geqslant 0$, то $P_t(\Phi) \geqslant c\mu^2$, что равносильно (8).

Исследуем вопрос о достижении равенства.

Пусть система Φ является t-полудизайном. В определении (6) положим $x = \varphi_j$ и учтем, что $A_t = c\mu$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} \bigl[\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\bigr]^t = c\,\mu\,\|\varphi_j\|^t, \qquad j \in 1:m. \tag{11}$$

Суммируя (11), приходим к равенству $P_t(\Phi) = c\mu^2$.

Обратно, пусть для некоторой системы Φ в (8) достигается равенство. Тогда величина W равна нулю. Из определения W следует

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}(x) - c\,\mu\,\omega_t(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

т. е. выполнено (6) с константой $A_t = c\mu$. Значит, Φ является t-полудизайном. Теорема доказана. $\square$

6°. Полиномы Гегенбауэра и теорема В. А. Юдина. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 3$. Рассмотрим вес

$$w_n(u) = (1-u^2)^{(n-3)/2}, \qquad u \in [-1, 1].$$

Пусть $G_k(u)$ — полиномы Гегенбауэра (ультрасферические многочлены) степени k. Они обладают свойством ортогональности с весом $w_n(u)$:

$$\int_{-1}^{1} G_k(u)\,G_s(u)\,w_n(u)\,du = 0 \qquad \text{при } k \neq s \tag{12}$$

(см. [10]). Отметим, что $G_0(u) \equiv 1$ при $k = 0$. При $k \geqslant 1$ полиномы $G_k(u)$ содержат либо только чётные степени u, либо только нечётные в зависимости от чётности k. Справедлива формула сложения

$$G_k\bigl(\langle x, y\rangle\bigr) = \sum_{j=1}^{N(k)} Y_j(x)\,Y_j(y), \qquad x,\, y \in S^{n-1}, \tag{13}$$

где Y_j, $j \in 1:N(k)$ — сферические функции порядка k (см. [11]).

Пусть $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*\} \subset S^{n-1}$ — сферический t-полудизайн, где t — чётное число, $t \geqslant 2$. В. А. Юдин [13] получил критерий сферического дизайна в терминах полиномов Гегенбауэра. Поскольку наше определение сферического t-полудизайна несколько отличается от определения, принятого в [13], то пришлось внести изменения в формулировку теоремы и дать новое доказательство.

ТЕОРЕМА 3 (В. А. Юдин)**.** *Для того чтобы система $\Phi^* \in S^{n-1}$ была сферическим t-полудизайном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\sum_{i=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, x\rangle\big) = 0, \qquad x \in S^{n-1}, \quad k = 2, 4, \ldots, t. \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ^* — сферический t-полудизайн. Тогда (см. п. 1°) Φ^* является сферическим s-полудизайном для $s = 2, 4, \ldots, t$ с константой $A_s = mc(s)$, где

$$c(s) = \frac{(s-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+s-2)}\,.$$

Покажем, что справедливы равенства

$$c(s) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \int_{-1}^{1} u^s\, w_n(u)\, du, \qquad s = 2, 4, \ldots, t, \tag{15}$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы S^{n-1}. Интеграл в (15) вычисляется так:

$$I(s) = 2\int_0^1 u^s\, w_n(u)\, du = \int_0^1 x^{(s-1)/2}\,(1-x)^{(n-3)/2}\, dx = \frac{\Gamma\big(\frac{s+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{s+n}{2}\big)}\,. \tag{16}$$

При $s = 0$ отсюда получим

$$I(0) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\,.$$

Преобразуем гамма-функции в (16) на основании свойства $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$:

$$\Gamma\big(\tfrac{s+1}{2}\big) = (s-1)!!\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s/2}}\,, \qquad \Gamma\big(\tfrac{n+s}{2}\big) = \frac{n(n+2)\cdots(n+s-2)}{2^{s/2}}\,\Gamma\big(\tfrac{n}{2}\big).$$

В результате при $s = 2, 4, \ldots, t$

$$I(s) = \frac{(s-1)!!\,\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{n(n+2)\cdots(n+s-2)\,\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\,c(s), \tag{17}$$

откуда следует (15).

Определим теперь значение $c(0)$ по формуле (15) при $s = 0$:

$$c(0) := \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\, I(0) = 1.$$

По определению сферических полудизайнов выполнены равенства

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bigl[\langle\varphi_i^*, x\rangle\bigr]^s = c(s), \qquad x \in S^{n-1}, \quad s = 2, 4, \ldots, t. \tag{18}$$

Равенство (18) будет выполнено и при $s = 0$ (оно примет вид $\frac{1}{m}\, m = c(0) = 1$).

Зафиксируем $k \in \{2, 4, \ldots, t\}$. Полином Гегенбауэра $G_k(u)$ содержит только чётные степени u:

$$G_k(u) = \sum_{s=0,2,\ldots,k} a(s)\, u^s.$$

Умножим (18) на $a(s)$ и сложим для $s = 0, 2, \ldots, t$. Получим с учетом равенств (15)

$$\sum_{i=1}^{m} G_k\bigl(\langle\varphi_i^*, x\rangle\bigr) = \sum_{s=0,2,\ldots,k} a(s)\, c(s) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_{-1}^{1} G_k(u)\, w_n(u)\, du = 0$$

для всех $x \in S^{n-1}$. Равенство интеграла нулю выполняется в силу свойства ортогональности (12).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены равенства (14). Нужно доказать, что система $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*\}$ является сферическим полудизайном порядка t. Разложим полином u^t по полиномам $G_k(u)$, $k = 0, 2, \ldots, t$:

$$u^t = \sum_{k=0,2,\ldots,t} d(k)\, G_k(u). \tag{19}$$

Подставим $u = \langle\varphi_i^*, x\rangle$, где $x \in S^{n-1}$, и просуммируем по $i \in 1 : m$:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bigl[\langle\varphi_i^*, x\rangle\bigr]^t = \frac{1}{m}\sum_{k=0,2,\ldots,t} d(k)\sum_{i=1}^{m} G_k\bigl(\langle\varphi_i^*, x\rangle\bigr).$$

В силу равенств (14) и равенства $G_0(u) = 1$ имеем

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bigl[\langle\varphi_i^*, x\rangle\bigr]^t = d(0), \qquad x \in S^{n-1}.$$

Возьмём любой вектор $x \neq \mathbb{O}$ и подставим в записанное выше равенство вектор $x/\|x\|$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i^*, x\rangle\big]^t = m\, d(0)\, \|x\|^t.$$

По определению 1 система Φ^* — сферический полудизайн. Теорема доказана. $\square$

7°. Потенциалы В. А. Юдина. Для любой системы $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} определим потенциалы В. А. Юдина

$$U_k(\Phi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\big), \qquad k = 1, 2, \ldots, t.$$

Поводом для введения названия «потенциал» послужила неотрицательность выражений $U_k(\Phi)$. Действительно, по формуле сложения (13)

$$U_k(\Phi) = \sum_{s=1}^{N(k)}\sum_{i=1}^{m} Y_s(\varphi_i)\sum_{j=1}^{m} Y_s(\varphi_j) = \sum_{s=1}^{N(k)}\Big[\sum_{i=1}^{m} Y_s(\varphi_i)\Big]^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, для любой системы $\Phi \subset S^{n-1}$ потенциалы Юдина $U_k(\Phi)$ неотрицательны для всех $k = 1, 2, \ldots, t$.

В случае $n = 3$, когда полиномы Гегенбауэра переходят в полиномы Лежандра, следующее утверждение сформулировано в [14]. При доказательстве достаточности удобно опираться на теорему Венкова.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть t — чётное число, $t \geqslant 2$. Система $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*\}$ на сфере S^{n-1} является сферическим t-полудизайном тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$U_k(\Phi^*) = 0, \qquad k = 2, 4, \ldots, t. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость. Для сферического t-полудизайна Φ^* по теореме Юдина выполнены равенства (14). Подставим в них $x = \varphi_j^*$ и просуммируем по $j \in 1 : m$. Получим

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, \varphi_j^*\rangle\big) = 0, \qquad k = 2, 4, \ldots, t, \tag{21}$$

что равносильно (20).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Опираемся на теорему 1. Пусть выполнены равенства (20). Вычислим обычный t-потенциал

$$P_t(\Phi^*) = \sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle\big]^t$$

и убедимся, что он равен cm^2, где c определено формулой (2).

Полином u^t разлагается по четным полиномам Гегенбауэра по формуле (19). Подставим $u = \langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle$ и просуммируем по $i, j \in 1 : m$. Получим

$$P_t(\Phi^*) = \sum_{k=0,2,\ldots,t} d(k) \sum_{i,j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i^*, \varphi_j^* \rangle\big).$$

В силу (21) и равенства $G_0(u) \equiv 1$ приходим к формуле

$$P_t(\Phi^*) = d(0)\, m^2. \tag{22}$$

Для вычисления $d(0)$ умножим (19) скалярно на G_0, используя скалярное произведение в пространстве $L_2(-1,1)$ с весом $w_n(u)$:

$$d(0) = \frac{(u^t, G_0)}{(G_0, G_0)} = \frac{\int_{-1}^{1} u^t\, w_n(u)\, du}{\int_{-1}^{1} w_n(u)\, du} = \frac{I(t)}{I(0)}\,.$$

Интегралы $I(t)$ и $I(0)$ были вычислены ранее. Подставив их значения, придём к равенству

$$d(0) = \frac{\Gamma\big(\frac{t+1}{2}\big)\, \Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\; \Gamma\big(\frac{t+n}{2}\big)} = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)} = c,$$

где c определено в (2). Из (22) следует, что $P_t(\Phi^*) = cm^2$. По теореме Венкова Φ^* является сферическим t-полудизайном. Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Для симметричного сферического t-полудизайна вида

$$\Phi_{2m}^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*,\, -\varphi_1^*, \ldots, -\varphi_m^*\}$$

теорема в части необходимости может быть усилена: будут выполняться равенства

$$U_k(\Phi_{2m}^*) = 0 \qquad \text{для всех } k = 1, 2, 3, \ldots, t.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. О. Котелина, А. Б. Певный. *Сферические дизайны и их основные свойства* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0404`).

2. B. Venkov. *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, Enseign. Math., Géneve, 2001, p. 10–86.

3. B. Reznick. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 96 (1992), no. 463, p. 1–155.

4. В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы математического анализа, вып. 39 (2009), с. 3–25.

5. P. Delsarte, J. M. Goetals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designes* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

6. E. Bonnai, A. Munemasa, B. Venkov. *The nonexistence of certain tight spherical designes* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

7. J. Haantjes. *Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional space* // Nieuw. Arch. Wisk. 1948. V. 22. P. 355–362.

8. J. J. Benedetto, M. Fickus. *Finite normalized tight frames. Frame potentials.* Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. № 2–4, p. 357–385.

9. P. G. Casazza. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.

10. Г. Сегё. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962.

11. С. Л. Соболев. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.

12. В. А. Юдин. *О вариациях дизайнов* // Проблемы передачи информации. 1999. Т. 35. Вып. 4. С. 68–73.

13. В. А. Юдин. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. № 3. С. 39–45.

14. Н. Н. Андреев, В. А. Юдин. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Матем. просвещение. Сер. 3. 1997. Вып. 1. С. 115–125.