СВОЙСТВО МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

21 ноября 2009 г.

Пусть m и r — натуральные числа, отличные от единицы. Обозначим через $\widetilde{W}_2^r$ линейное пространство, состоящее из m-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а r-я производная суммируема с квадратом на основном периоде $[0,m]$. Через $\widetilde{\mathbf{W}}_2^r$ обозначим пространство d-мерных вектор-функций, координатные функции которых принадлежат пространству $\widetilde{W}_2^r$.

Для заданных наборов векторов $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(m-1)$ и $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots$ $\dots, \mathbf{y}(m-1)$ из $\mathbb{R}^d$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(\mathbf{f}) := \int_0^m \left\|\mathbf{f}^{(r)}(t)\right\|^2 dt \to \min, \\ &\qquad \mathbf{f}(l) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0:m-1, \\ &\qquad \mathbf{f}'(l) = \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0:m-1, \\ &\qquad \mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r. \end{aligned} \tag{1}$$

В данном докладе будет показано, что единственным решением этой задачи является предельный сплайн дискретного аналога эрмитовой сплайн-интерполяции (см. [1]).

1°. Приведём необходимые сведения из [1].

Фунция $\beta_1(t)$ задаётся на отрезке $[0,1]$ формулой

$$\beta_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{при } t = 0, \\ \frac{1}{2} - t, & \text{при } t \in (0,1], \end{cases}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

и продолжается на всю вещественную ось с периодом 1. Функции $\beta_\nu(t)$ для $\nu = 2, 3, \ldots$ определяются на отрезке $[0, 1]$ рекуррентным соотношением

$$\beta_\nu(t) = \int_0^t \beta_{\nu-1}(\tau)\, d\tau + \int_0^1 \tau\, \beta_{\nu-1}(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [0, 1],$$

и также продолжаются на всю вещественную ось с периодом 1. Ясно, что равенство

$$\beta'_{\nu+1}(t) = \beta_\nu(t) \tag{2}$$

при $\nu \geqslant 2$ выполняется для всех t, а при $\nu = 1$ — для всех нецелых t. Кроме того, функции β_ν удовлетворяют условию Липшица при $\nu \geqslant 2$.

2°. В [1] были рассмотрены сплайны $\mathbf{S}_r(t)$ вида

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_{2r}\big(\tfrac{t-p}{m}\big), \tag{3}$$

где $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1(p), \mathbf{c}_2(p) \in \mathbb{R}^d$ — некоторые коэффициенты, для которых выполнено соотношение $\sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p) = 0$. Было доказано, что найдётся сплайн $\mathbf{S}_r(t)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r(l) &= \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \mathbf{S}'_r(l) &= \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0 : m-1. \end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что $\mathbf{S}_r$ имеет период m. Покажем, что $\mathbf{S}_r \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^{2r-2}$. Применяя соотношение (2), получим

$$\mathbf{S}_r^{(2r-3)}(t) = \frac{1}{m^{2r-3}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m^{2r-3}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_3\big(\tfrac{t-p}{m}\big).$$

Так как β_2 и β_3 удовлетворяют условию Липшица, то вектор-функция $\mathbf{S}_r^{(2r-3)}(t)$ абсолютно непрерывна. Далее,

$$\mathbf{S}_r^{(2r-2)}(t) = \frac{1}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, \beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, \beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big),$$

В силу того, что функция β_1 кусочно-линейна, а β_2 — непрерывна, получим, что $\mathbf{S}_r^{(2r-2)} \in L_2\big([0, m]\big)$. Таким образом, вектор-функция $\mathbf{S}_r$ действительно принадлежит пространству $\widetilde{\mathbf{W}}_2^{2r-2}$. Так как $r \geqslant 2$, то $\widetilde{\mathbf{W}}_2^{2r-2} \subset \widetilde{\mathbf{W}}_2^r$, поэтому $\mathbf{S}_r \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r$.

3°. Докажем два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть $f, g \in \widetilde{W}_2^1$. Тогда справедливо правило интегрирования по частям*

$$\int_0^m f'(t)\,g(t)\,dt = -\int_0^m f(t)\,g'(t)\,dt. \tag{5}$$

Доказательство. По определению функции f и g имеют производные в почти всех точках и $f', g' \in L_2\bigl([0,m]\bigr)$. Кроме того, функции f и g абсолютно непрерывны, поэтому также принадлежат пространству L_2. Таким образом, произведения $f'g$ и $f\,g'$ суммируемы на $[0,m]$, поэтому интегралы в обеих частях равенства (5) определены. Следовательно,

$$\int_0^m f'(t)\,g(t)\,dt + \int_0^m f(t)\,g'(t)\,dt = \int_0^m \bigl(f(t)\,g(t)\bigr)'\,dt.$$

Функция fg абсолютно непрерывна как произведение абсолютно непрерывных функций (см. [2, с. 264]). А так как абсолютно непрерывная функция является неопределённым интегралом своей производной (см. [2, с. 274]), то в силу m-периодичности выполнено равенство

$$\int_0^m \bigl(f(t)\,g(t)\bigr)'\,dt = f(t)\,g(t)\Big|_0^m = 0.$$

$\square$

ЛЕММА 2. *Пусть $p \in 0 : m-1$ и задана функция $h \in \widetilde{W}_2^1$ такая, что $h(0) = h(p) = 0$. Тогда*

$$\int_0^m \beta_1\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr)\,h'(t)\,dt = \tfrac{1}{m}\int_0^m h(t)\,dt.$$

Доказательство. Воспользуемся определением функции β_1 и формулой интегрирования по частям (лемма 1):

$$\int_0^m \beta_1\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr)h'(t)\,dt = \int_0^p \Bigl(\tfrac{1}{2} - \bigl(\tfrac{t-p}{m} + 1\bigr)\Bigr)h'(t)\,dt + \int_p^m \bigl(\tfrac{1}{2} - \tfrac{t-p}{m}\bigr)h'(t)\,dt =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\bigl(h(p) - h(0)\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(h(m) - h(p)\bigr) - \int_0^m \tfrac{t-p}{m}\,h'(t)\,dt = \tfrac{1}{m}\int_0^m h(t)\,dt.$$

$\square$

ТЕОРЕМА. *Единственным решением экстремальной задачи* (1) *является сплайн* $\mathbf{S}_r(t)$ *вида* (3), *удовлетворяющий условиям* (4).

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}(t)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (1). Положим $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{S}_r$. Ясно, что $\mathbf{h} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r$ и

$$\mathbf{h}(l) = \mathbf{h}'(l) = 0, \qquad l \in 0 : m-1.$$

Пусть $\mathbf{h}(t) = \big(h^1(t), \ldots, h^d(t)\big)$, $\mathbf{S}_r(t) = \big(\sigma^1(t), \ldots, \sigma^d(t)\big)$. Имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h} + \mathbf{S}_r) = \int_0^m \Big(\big\| \mathbf{h}^{(r)}(t) \big\|^2 + 2 \left\langle \mathbf{h}^{(r)}(t), \mathbf{S}_r^{(r)}(t) \right\rangle + \big\| \mathbf{S}_r^{(r)}(t) \big\|^2 \Big) dt =$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r) + 2 \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r)}(t)\, dt.$$

Зафиксируем $\alpha \in 1 : d$. Так как $\sigma_\alpha \in \widetilde{W}_2^{2r-2}$, то при $r \geqslant 3$ имеем $\sigma_\alpha^{(r)} \in \widetilde{W}_2^{r-2}$. Следовательно, по лемме 1 получим

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) := \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r)}(t)\, dt = - \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r+1)}(t)\, dt.$$

Проведя интегрирование по частям ещё $r-3$ раза, придём к равенству

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-2} \int_0^m h_\alpha''(t)\, \sigma_\alpha^{(2r-2)}(t)\, dt,$$

которое справедливо и для $r = 2$.

Функция $\sigma_\alpha(t)$ как координатная функция сплайна $\mathbf{S}_r(t)$ имеет вид

$$\sigma_\alpha(t) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, \beta_{2r-1}\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, \beta_{2r}\big(\tfrac{t-p}{m}\big),$$

где c_0, $c_1(p)$, $c_2(p)$ — вещественные коэффициенты, для которых выполняется условие $\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) = 0$. Воспользовавшись соотношением (2), получим

$$\sigma_\alpha^{(2r-2)}(t) = \frac{1}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p)\, \beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big) + \frac{1}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\, \beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big).$$

Таким образом,

$$G(h_\alpha, \sigma_\alpha) = \frac{(-1)^r}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p) \int_0^m h_\alpha''(t)\, \beta_1\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\, dt +$$

$$+ \frac{(-1)^r}{m^{2r-2}} \sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) \int_0^m h_\alpha''(t)\, \beta_2\big(\tfrac{t-p}{m}\big)\, dt.$$

Рассмотрим слагаемые этих сумм по отдельности. Согласно лемме 2,

$$\int_0^m h''_\alpha(t)\,\beta_1\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr)\,dt = \tfrac{1}{m}\int_0^m h'_\alpha(t)\,dt = \tfrac{1}{m}\bigl(h_\alpha(m)-h_\alpha(0)\bigr) = 0,$$

то есть первая сумма равна нулю. Для слагаемых второй суммы применим формулу интегрирования по частям (лемма 1) и снова воспользуемся леммой 2:

$$\int_0^m h''_\alpha(t)\,\beta_2\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr)\,dt = -\frac{1}{m}\int_0^m h'_\alpha(t)\,\beta_1\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr)\,dt = -\frac{1}{m^2}\int_0^m h_\alpha(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$G(h_\alpha,\sigma_\alpha) = \frac{(-1)^{r+1}}{m^{2r}}\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p)\int_0^m h_\alpha(t)\,dt = 0.$$

Мы воспользовались тем, что $\sum_{p=0}^{m-1} c_2(p) = 0$.

Итак, $\mathbf{F}(f) = \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$. Значит, $\mathbf{F}(f) \geqslant \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, поэтому сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ является решением задачи (1).

Проверим единственность решения. Если $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, то $\mathbf{F}(\mathbf{h}) = 0$. Значит, $\mathbf{h}^{(r)}(t) = 0$ для почти всех $t \in [0,m]$. Тогда вектор-функция $\mathbf{h}^{(r-1)}$ постоянна на $[0,m]$ (см. [2, с. 266]), а в силу m-периодичности — и на всей вещественной оси. Следовательно, $\mathbf{h}(t)$ — многочлен с векторными коэффициентами. Но единственный периодический многочлен — постоянная функция, что вместе с условием $\mathbf{h}(0) = 0$ приводит к тождеству $\mathbf{h}(t) \equiv 0$. Таким образом, имеем $\mathbf{f} = \mathbf{S}_r$, что доказывает единственность решения (1). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретного аналога эрмитовой интерполяции* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 19 сентября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0919`)

2. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* 3-е изд. СПб.: Лань, 1999. 560 с.