БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

23 апреля 2011 г.

Данный доклад примыкает к докладу [1]. Рассматриваются два варианта быстрого преобразования Уолша.

1°. Пусть $N = 2^s$, где s – натуральное число. В пространстве $\mathbb{C}_N$ построим рекуррентную последовательность базисов

$$w_\nu = \bigl\{ w_\nu(k; j) \bigr\}_{k=0}^{N-1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s.$$

Сигнал $w_\nu(k; j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $w_\nu(k)$. Положим [2, с. 53]

$$\begin{gathered} w_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ w_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + w_{\nu-1}\bigl(l + (2p+1)\Delta_\nu\bigr), \\ w_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - w_{\nu-1}\bigl(l + (2p+1)\Delta_\nu\bigr), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$, $N_\nu = N/2^\nu$. Переход от базиса $w_{\nu-1}$ к базису w_ν можно записать одной строкой

$$\begin{gathered} w_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\bigl(l + (2p+1)\Delta_\nu\bigr), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2}$$

В частности, при $\nu = 1$ ($\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$)

$$\begin{gathered} w_1(\sigma + 2p) = w_0(2p) + (-1)^\sigma w_0(2p+1), \\ p \in 0 : N_1 - 1, \quad \sigma \in 0 : 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Ясно, что сигналы ν-го уровня w_ν являются линейными комбинациями сигналов нулевого уровня w_0, состоящего из сдвигов единичного импульса.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива формула*

$$w_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, w_\nu(q+p\Delta_{\nu+1}), \tag{4}$$

$$p \in 0:N_\nu-1, \quad l \in 0:\Delta_{\nu+1}-1, \quad \nu = 1,\dots,s,$$

где $A_\nu[l,q]$ — элементы матрицы Адамара

$$A_\nu = A_\nu[0:\Delta_{\nu+1}-1,\ 0:\Delta_{\nu+1}-1],$$

определяемой с помощью рекуррентного соотношения

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad \nu = 2,\ 3,\ \dots. \tag{5}$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (4) совпадает с (3), если в последней заменить σ на l. Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν.

Индекс $l \in 0:\Delta_{\nu+1}-1$ представим в виде $l = \sigma\Delta_\nu + l'$, где $l' \in 0:\Delta_\nu - 1$, $\sigma \in 0:1$. На основании (2) и индукционного предположения запишем

$$w_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = w_\nu(l'+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) =$$
$$= w_{\nu-1}(l'+2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\big(l'+(2p+1)\Delta_\nu\big) =$$
$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_{\nu-1}[l',q]\, w_0(q+2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_{\nu-1}[l',q]\, w_0\big(q+(2p+1)\Delta_\nu\big).$$

Согласно (5) (см. [1])

$$A_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu, q+\tau\Delta_\nu] = (-1)^{\sigma\tau} A_{\nu-1}[l',q],$$
$$l', q \in 0:\Delta_\nu-1, \quad \sigma,\tau \in 0:1.$$

В частности, при $\tau = 0$

$$A_{\nu-1}[l',q] = A_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu, q] = A_\nu[l,q]$$

и при $\tau = 1$

$$(-1)^\sigma A_{\nu-1}[l',q] = A_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu, q+\Delta_\nu] = A_\nu[l, q+\Delta_\nu].$$

Учитывая это, получаем

$$w_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_\nu[l,q]\, w_0(q+p\Delta_{\nu+1}) +$$
$$+ \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_\nu[l,q+\Delta_\nu]\, w_0(q+\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, w_0(q+p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. $\square$

При $\nu = s$ ($N_s = 1$, $\Delta_{s+1} = N$) формула (4) принимает вид

$$w_s(l;j) = \sum_{q=0}^{N-1} A_s[l,q]\,\delta_N(j-q) = A_s[l,j], \quad l,j \in 0:N-1.$$

Вместе с тем, k-я строка матрицы Адамара $A_s[k,j]$ совпадает со значениями k-й функции Уолша $v_k(j)$ на множестве $0:N-1$ (см. [1]), то есть

$$A_s[k,j] = v_k(j), \quad k,j \in 0:N-1.$$

Значит,

$$w_s(k;j) = v_k(j), \quad k,j \in 0:N-1. \tag{6}$$

Приходим к следующему выводу: *рекурентные соотношения* (1) *преобразуют базис, состоящий из сдвигов единичного импульса, в базис Уолша.*

2°. Как известно [1], базис Уолша состоит из ортогональных сигналов. Покажем, что таким же свойтвом обладают и промежуточные базисы w_ν.

ТЕОРЕМА 2. *При каждом* $\nu \in 0:s$ *сигналы*

$$w_\nu(0),\ w_\nu(1), \ldots,\ w_\nu(N-1) \tag{7}$$

попарно ортогональны и $\big\|w_\nu(k)\big\|^2 = 2^\nu$ *при всех* $k \in 0:N-1$.

Доказательство основано на двух свойствах матриц Адамара, легко следующих из определения (5) (см. [1]): при всех натуральных ν

- матрицы Адамара A_ν симметричны;
- справедливо равенство $A_\nu A_\nu = 2^\nu E_{2^\nu}$.

Утверждение теоремы при $\nu = 0$ эквивалентно очевидному равенству

$$\big\langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - k')\big\rangle = \delta_N(k-k'), \quad k,k' \in 0:N-1. \tag{8}$$

Пусть $\nu \in 1:s$. Возьмём $k,k' \in 0:N-1$ и представим их в виде

$$k = l + p\Delta_{\nu+1}, \quad k' = l' + p'\Delta_{\nu+1},$$

где $l,l' \in 0:\Delta_{\nu+1}-1$, $p,p' \in 0:N_\nu - 1$. Согласно (4) и (8)

$$\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle = \sum_{q,\,q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\,A_\nu[l',q']\,\delta_N\big(q-q'+(p-p')\Delta_{\nu+1}\big).$$

При $p \neq p'$ аргумент у δ_N отличен от нуля при всех q, q', поскольку $|q - q'| \leqslant \leqslant \Delta_{\nu+1} - 1$. В этом случае $\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle = 0$.

Пусть $p = p'$. Тогда в силу отмеченных выше свойств матриц Адамара

$$\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, A_\nu[l',q] =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l,q]\, A_\nu[q,l'] = (A_\nu, A_\nu)[l,l'] = 2^\nu E_{2^\nu}[l,l'].$$

Значит, скалярное произведение $\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k')\big\rangle$ отлично от нуля только при $p = p'$, $l = l'$, то есть только при $k = k'$. При этом

$$\big\langle w_\nu(k), w_\nu(k)\big\rangle = 2^\nu, \quad k \in 0 : N-1.$$

Теорема доказана. $\square$

По существу установлено, что при каждом $\nu \in 0 : s$ сигналы (7) образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$.

3°. Возьмём произвольный сигнал $x \in \mathbb{C}_N$. При любом $\nu \in 0 : s$ его можно разложить по ортогональному базису (7):

$$x = \tfrac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_\nu(k)\, w_\nu(k). \tag{9}$$

Здесь $\xi_\nu(k) = \big\langle x, w_\nu(k)\big\rangle$. В частности,

$$\xi_0(k) = \big\langle x, \delta_N(\cdot - k)\big\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-k) = x(k).$$

На основании (2) получаем

$$\begin{aligned} \xi_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \big\langle x, w_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\big\rangle = \\ &= \Big\langle x, w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big)\Big\rangle = \\ &= \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma \xi_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big). \end{aligned}$$

Приходим к следующей схеме вычислений коэффициентов $\xi_\nu(k)$ разложений (9), аналогичной рекуррентным соотношениям (1) для сигналов:

$$\begin{gathered} \xi_0(k) = x(k), \quad k = 0 : N-1; \\ \xi_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \xi_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ \xi_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \xi_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{10}$$

При $\nu = s$ формула (9) согласно (6) принимает вид

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_s(k)\, v_k.$$

Таким образом, по схеме (10) вычисляются коэффициенты $\xi_s(k)$ разложения сигнала x по базису Уолша. Но не только. Попутно вычисляются коэффициенты разложения сигнала x по всем промежуточным ортогональным базисам w_ν.

Вычислительная схема (10) называется *быстрым преобразованием Уолша*. Она использует только сложения/вычитания в количестве

$$2 \sum_{\nu=1}^{s} N_\nu \Delta_\nu = \sum_{\nu=1}^{s} N_\nu \Delta_{\nu+1} = sN = N \log_2 N$$

операций.

Соотношения (10) допускают обращение:

$$\begin{aligned} \xi_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) &= \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) + \xi_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\big], \\ \xi_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu) &= \tfrac{1}{2}\big[\xi_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) - \xi_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\big], \\ p \in 0 : N_\nu - 1, &\quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Схема (11) позволяет по спектру Уолша $\big\{\xi_s(k)\big\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x восстановить его отсчёты, а именно $x(k) = \xi_0(k)$, $k \in 0 : N-1$.

4°. С практической точки зрения интерес представляет разложение сигнала не столько по базису Уолша $\{v_k\}_{k=0}^{N-1}$, сколько по базису $\{\hat{v}_k\}_{k=0}^{N-1}$, состоящему из функций Уолша, упорядоченных по частоте (по базису Уолша-Пэли). Напомним [1], что

$$\hat{v}_k(j) = v_{\mathrm{rev}_s(k)}(j), \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Здесь $\mathrm{rev}_s(k)$ — целое число, двоичный код которого равен перевёрнутому двоичному коду числа k. Операция rev_s является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Чтобы получить разложение сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ по базису Уолша-Пэли, нужно в вычислительную схему (10) внести единственное изменение: равенство $\xi_0(k) = x(k)$ заменить на $\xi_0(k) = \hat{x}(k)$, где

$$\hat{x}(k) = x(\mathrm{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N-1.$$

В результате найдём коэффициенты $\xi_s(k)$ разложения сигнала $\hat{x}$ по базису Уолша:

$$\hat{x}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_s(k)\, v_k(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{12}$$

Как известно [1], $v_{\mathrm{rev}_s(k)}(\mathrm{rev}_s(j)) = v_k(j)$, так что

$$v_k(j) = \hat{v}_k(\mathrm{rev}_s(j)).$$

Подставив это в (12) и заменив $\mathrm{rev}_s(j)$ на j, придём к разложению сигнала x по базису Уолша-Пэли:

$$x(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_s(k)\, \hat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

5°. Возьмём две перестановки π и π' множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ и рассмотрим при $\nu \in 0 : s$ систему сигналов $\bigl\{w_\nu\bigl(\pi(k); \pi'(j)\bigr)\bigr\}_{k=0}^{N-1}$. Очевидно, что новая система, так же как и $\bigl\{w_\nu(k; j)\bigr\}_{k=0}^{N-1}$, будет ортогональной. Это соображение увеличивает количество ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$.

Обратимся к частному случаю

$$g_\nu(k; j) = w_\nu(\mathrm{rev}_s(k), \mathrm{rev}_s(j)), \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Имеем

$$\begin{gathered} g_0(k; j) = w_0\bigl(\mathrm{rev}_s(k); \mathrm{rev}_s(j)\bigr) = \delta_N\bigl(\mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_s(k))\bigr) = \delta_N(j-k); \\ g_s(k; j) = w_s\bigl(\mathrm{rev}_s(k); \mathrm{rev}_s(j)\bigr) = v_{\mathrm{rev}_s(k)}\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = v_k(j). \end{gathered} \tag{13}$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо рекурентное соотношение*

$$\begin{gathered} g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ g_\nu\bigl((2l+\sigma)N_\nu + p\bigr) = g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + (-1)^\sigma g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Предварительно установим, что

$$\mathrm{rev}_s\bigl((2l+\sigma)N_\nu + p\bigr) = \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma\Delta_\nu + \Delta_{\nu+1}\,\mathrm{rev}_{s-\nu}(p). \tag{15}$$

Границы индексов такие же, как в (14).

При $\nu = 1$ ($l = 0$, $\mathrm{rev}_0(0) = 0$ по определению) формула (15) принимает вид

$$\mathrm{rev}_s(\sigma N_1 + p) = \sigma + 2\,\mathrm{rev}_{s-1}(p), \quad p \in 0 : N_1 - 1, \ \sigma \in 0 : 1.$$

Это равенство проверяется легко. Пусть $p = (p_{s-2}, p_{s-3}, \ldots, p_o)_2$. Тогда

$$\begin{gathered} \mathrm{rev}_s(\sigma N_1 + p) = \mathrm{rev}_s(\sigma\, 2^{s-1} + p_{s-2}\, 2^{s-2} + p_{s-3}\, 2^{s-3} + \ldots + p_0) = \\ = p_0\, 2^{s-1} + p_1\, 2^{s-2} + \ldots + p_{s-2}\, 2 + \sigma = \sigma + 2\,\mathrm{rev}_{s-1}(p). \end{gathered}$$

При $\nu \geqslant 2$ воспользуемся представлениями

$$p = (p_{s-\nu-1}, p_{s-\nu-2}, \ldots, p_o)_2, \ l = (l_{\nu-2}, l_{\nu-3}, \ldots, l_o)_2.$$

Получим

$$\begin{gathered}\operatorname{rev}_s\bigl((2l+\sigma)N_\nu + p\bigr) = \operatorname{rev}_s(l_{\nu-2}\, 2^{s-1} + l_{\nu-3}\, 2^{s-2} + \ldots + l_0\, 2^{s-\nu+1} + \sigma\, 2^{s-\nu} + \\ + p_{s-\nu-1}\, 2^{s-\nu-1} + p_{s-\nu-2}\, 2^{s-\nu-2} + \ldots + p_0) = \\ = p_0\, 2^{s-1} + p_1\, 2^{s-2} + \ldots + p_{s-\nu-1}\, 2^{\nu} + \sigma\, 2^{\nu-1} + l_0\, 2^{\nu-2} + l_1\, 2^{\nu-3} + \ldots + l_{\nu-2} = \\ = \Delta_{\nu+1} \operatorname{rev}_{s-\nu}(p) + \sigma\Delta_\nu + \operatorname{rev}_{\nu-1}(l),\end{gathered}$$

что равносильно (15).

Переходим к доказательству рекурентного соотношения (14). На основании (15) и (2) запишем

$$\begin{gathered}g_\nu\bigl((2l+\sigma)N_\nu + p; j\bigr) = w_\nu\Bigl(\operatorname{rev}_s\bigl((2l+\sigma)N_\nu + p\bigr); rev_s(j)\Bigr) = \\ = w_\nu\bigl(\operatorname{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma\Delta_\nu + \Delta_{\nu+1} \operatorname{rev}_{s-\nu}(p); \operatorname{rev}_s(j)\bigr) = \\ = w_{\nu-1}\bigl(\operatorname{rev}_{\nu-1}(l) + 2\operatorname{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu; \operatorname{rev}_s(j)\bigr) + \\ + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\Bigl(\operatorname{rev}_{\nu-1}(l) + \bigl(2\operatorname{rev}_{s-\nu}(p) + 1\bigr)\Delta_\nu; \operatorname{rev}_s(j)\Bigr).\end{gathered}$$

Из (15) при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ следует, что

$$\begin{gathered}\operatorname{rev}_{\nu-1}(l) + 2\operatorname{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu = \operatorname{rev}_s(lN_{\nu-1} + p), \\ \operatorname{rev}_{\nu-1}(l) + \bigl(2\operatorname{rev}_{s-\nu}(p) + 1\bigr)\Delta_\nu = \operatorname{rev}_s(lN_{\nu-1} + N_\nu + p),\end{gathered}$$

поэтому

$$\begin{gathered}g_\nu\bigl((2l+\sigma)N_\nu + p; j\bigr) = w_{\nu-1}\bigl(\operatorname{rev}_s(lN_{\nu-1} + p); rev_s(j)\bigr) + \\ + (-1)^\sigma w_{\nu-1}\bigl(\operatorname{rev}_s(lN_{\nu-1} + N_\nu + p); rev_s(j)\bigr) = \\ = g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p; j) + (-1)^\sigma g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p; j).\end{gathered}$$

Теорема доказана. □

6°. Наряду с сигналом $x \in \mathbb{C}_N$ рассмотрим сигнал

$$\hat{x}(j) = x\bigl(\operatorname{rev}_s(j)\bigr), \quad j \in 0 : N-1.$$

При любом $\nu \in 0 : s$ сигнал $\hat{x}$ можно разложить по ортогональному базису $\bigl\{g_\nu(k)\bigr\}_{k=0}^{N-1}$:

$$\hat{x} = \tfrac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_\nu(k)\, g_\nu(k). \tag{16}$$

Здесь $\zeta_\nu(k) = \langle \hat{x}, g_\nu(k) \rangle$, поскольку $\|g_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$. Рекурентное соотношение (14), используемое отдельно при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$, порождает следующую схему вычислений коэффициентов $\zeta_\nu(k)$ разложений (16) (аналогичная ситуация была в п. 3°):

$$\begin{gathered}
\zeta_0(k) = \hat{x}(k) = x\big(\mathrm{rev}_s(k)\big), \quad k = 0 : N-1; \\
\zeta_\nu(2lN_\nu + p) = \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\
\zeta_\nu\big((2l+1)N_\nu + p\big) = \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) - \zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\
p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.
\end{gathered} \tag{17}$$

При $\nu = s$ формула (16) согласно (13) принимает вид

$$\hat{x}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_s(k)\, v_k(j),$$

что, как показано в п. 4°, равносильно представлению

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_s(k)\, \hat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Таким образом, по схеме (17) вычисляются коэффициенты $\zeta_s(k)$ разложения сигнала x по базису Уолша-Пэли.

Схема (17) представляет собой второй вариант быстрого преобразования Уолша.

7°. Соотношения (17) допускают обращение:

$$\begin{gathered}
\zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) = \tfrac{1}{2}\Big[\zeta_\nu(2lN_\nu + p) + \zeta_\nu\big((2l+1)N_\nu + p\big)\Big], \\
\zeta_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p) = \tfrac{1}{2}\Big[\zeta_\nu(2lN_\nu + p) - \zeta_\nu\big((2l+1)N_\nu + p\big)\Big], \\
p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.
\end{gathered} \tag{18}$$

Схема (18) позволяет по спектру Уолша-Пэли $\{\zeta_s(k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x восстановить его отсчёты, а именно $x(k) = \zeta_0\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)$, $k = 0 : N-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть 2. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 100 с.