УДК 519.72 Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. __ (№__)

Пахомов С.Н.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО СЕГМЕНТА СПЕКТРА ФУРЬЕ

При решении различных задач цифровой обработки информации в реальном масштабе времени возникает необходимость использования периодической техники для обработки непериодических сигналов. При этом зачастую интерес представляет не весь спектр сигнала, а только его внутренний сегмент. В настоящее время существует два подхода к решению задачи нахождения внутреннего сегмента спектра: вычисление всех компонент с отбрасыванием ненужных и поточечное вычисление необходимых компонент.

Первый подход может быть реализован с применением алгоритма Кули-Тьюки [1-3]. Достоинством этого метода является быстрота, достигаемая использованием математического аппарата быстрого преобразования. Однако существенным недостатком такого метода являются производимые им лишние вычисления.

Второй подход реализуется с использованием алгоритма Герцеля [4]. В отличие от алгоритма Кули-Тьюки, этот метод не производит лишних вычислений. Однако его недостатком является низкое быстродействие при больших длинах сегмента.

В данной работе предлагается новый подход — модифицированный алгоритм Кули-Тьюки, при котором вычисляются только требуемые компоненты спектра и при этом лишних вычислений не производится. Работа содержит описание быстрого алгоритма, доказательство его оптимальности, подсчет количества операций и оценку эффективности в сравнении с другими алгоритмами.

1° **Введение**

Пусть s — натуральное число и $N = 2^s$. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j),\ j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами. Дискретное преобразование Фурье* (ДПФ) $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ сопоставляет сигналу x сигнал

$X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Сигнал X называется *спектром* Фурье.

Пусть необходимо вычислять лишь часть компонент ДПФ, индексы которых принадлежат заданному промежутку $a : b$, $0 \le a \le b \le N-1$. Назовем такую выборку *внутренним сегментом спектра.*

2° **Описание алгоритма**

За основу быстрого алгоритма вычисления внутреннего сегмента спектра сигнала взято *быстрое преобразование Фурье* (БПФ) *с прореживанием по частоте* [1–3]. Для описания алгоритма введем в рассмотрение перестановку rev_s, которая сопоставляет числу $j \in 0 : 2^s - 1$ число $\mathrm{rev}_s(j)$, двоичный код которого равен перевернутому s-разрядному двоичному коду числа j. Целое число j можно единственным образом представить в виде $j = j''r + j'$, где r — натуральное число и $j' \in \{0, 1, ..., r-1\}$. Для неполного частного j'' и остатка j' используются обозначения $j'' = \lfloor j/r \rfloor$, $j' = \langle j \rangle_r$. Множество $\langle a : b \rangle_r$ состоит из чисел $\langle a \rangle_r$, $\langle a+1 \rangle_r, \ldots, \langle b \rangle_r$. Положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$. Тогда быстрый алгоритм вычисления внутреннего сегмента спектра сигнала может быть записан в следующем виде:

$$x_0(j) = x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big), \quad j \in 0 : N-1;$$

$$\begin{aligned}
x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) =& x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \\
& + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\
x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =& x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \\
& - \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\
p \in 0 : N_\nu - 1,\ l \in 0 :& \Delta_\nu - 1,\ \nu \in 1 : \lfloor log_2(b - a + 1) \rfloor;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{gathered}
x_\nu(k+p\Delta_{\nu+1}) = x_{\nu-1}(l+2p\Delta_\nu) + \\
+ (-1)^\sigma \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}\big(l+(2p+1)\Delta_\nu\big), \\
p \in 0 : N_\nu - 1,\ \ k \in \langle a : b \rangle_{\Delta_{\nu+1}},\ \nu \in \lfloor log_2(b-a+1) \rfloor + 1 : s, \\
l = \langle k \rangle_{\Delta_\nu},\ \sigma = \lfloor k/\Delta_\nu \rfloor \quad (k = l + \sigma\Delta_\nu).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Результатом вычисления по приведенному алгоритму является искомый внутренний сегмент спектра. Действительно, на последнем шаге алгоритма $\nu = s$, $N_\nu = 1$, $\Delta_{\nu+1} = N$, откуда $p = 0$ и $k \in a : b$. Следовательно, на этом шаге вычисляются $x_s(k) = X(k)$, $k \in a : b$.

3° **Оптимальность**

Покажем, что приведенный алгоритм оптимален в том смысле, что вычисляемые на каждом шаге компоненты необходимы и достаточны для вычислений, производимых на следующем шаге.

По соотношениям (1) на ν-м шаге алгоритма вычисляются все компоненты. Их достаточность для вычислений на $(\nu+1)$-м шаге очевидна. Для доказательства необходимости рассмотрим количество компонент, вычисляемых на ν-м шаге по соотношеням (2). Так как $p \in 0 : N_\nu - 1$, а $k \in \langle a : b \rangle_{\Delta_{\nu+1}}$, то на ν-м шаге алгоритма вычисляется количество компонент, равное

$$N_\nu(b-a+1) = N(b-a+1)/2^\nu.$$

Таким образом, при $\nu \le \lfloor log_2(b-a+1) \rfloor$ количество вычисляемых компонент не менее, чем N, т.е. при $\nu \in 1 : \lfloor log_2(b-a+1) \rfloor$ необходимо вычислять все компоненты.

Покажем необходимость и достаточность вычислений по соотношениям (2). На ν-м шаге по (2) вычисляются компоненты

$$x_\nu(k+p\Delta_{\nu+1}), \quad p \in 0 : N_\nu - 1,\ k \in \langle a : b \rangle_{\Delta_{\nu+1}}. \tag{3}$$

На $(\nu+1)$-м шаге по (2) для вычисления $x_{\nu+1}(k+p\Delta_{\nu+2})$ необходимы и достаточны компоненты

$$
\begin{gathered}
x_\nu(l+2p\Delta_{\nu+1}) \text{ и } x_\nu\big(l+(2p+1)\Delta_{\nu+1}\big), \\
p \in 0 : N_{\nu+1} - 1,\ k \in \langle a : b \rangle_{\Delta_{\nu+2}},\ l = \langle k \rangle_{\Delta_{\nu+1}},
\end{gathered}
$$

т.е.

$$x_\nu(l{+}p'\Delta_{\nu+1}),\qquad p'\in 0:N_\nu-1,\ k\in\langle a:b\rangle_{\Delta_{\nu+2}},\ l=\langle k\rangle_{\Delta_{\nu+1}}. \tag{4}$$

Очевидно, (3) и (4) задают одни и те же компоненты.

4° **Эффективность**

Определим количество арифметических операций, необходимых для нахождения внутреннего сегмента спектра. Для этого отдельно рассмотрим вычисления, проводимые по формулам (1) и (2).

В формуле (1) количество комплексных умножений равно

$$M_1=\sum_{\nu=1}^{\lfloor log_2(b-a+1)\rfloor} N_\nu\Delta_\nu=\frac{N}{2}\left\lfloor log_2(b-a+1)\right\rfloor, \tag{5}$$

количество комплексных сложений равно

$$A_1=2M_1=N\left\lfloor log_2(b-a+1)\right\rfloor. \tag{6}$$

В формуле (2) количество комплексных умножений равно

$$M_2=\sum_{\nu=\lfloor log_2(b-a+1)\rfloor+1}^{s} N_\nu(b-a+1)= =(b-a+1)\big(N\cdot 2^{-\lfloor log_2(b-a+1)\rfloor}-1\big), \tag{7}$$

количество комплексных сложений равно

$$A_2=M_2=(b-a+1)\big(N\cdot 2^{-\lfloor log_2(b-a+1)\rfloor}-1\big). \tag{8}$$

Учитывая соотношения (5)–(8), получаем формулы для общего числа комплексных умножений

$$M=M_1+M_2=\frac{N}{2}\left\lfloor log_2(b-a+1)\right\rfloor+ +(b-a+1)\big(N\cdot 2^{-\lfloor log_2(b-a+1)\rfloor}-1\big) \tag{9}$$

и общего числа комплексных сложений

$$A = A_1 + A_2 = N\left\lfloor log_2(b-a+1)\right\rfloor + \\ + (b-a+1)\big(N\cdot 2^{-\lfloor log_2(b-a+1)\rfloor} - 1\big). \tag{10}$$

В случае $b-a+1 = 2^c$ формулы (9), (10) принимают вид

$$M = \frac{Nc}{2} + 2^c(2^{s-c}-1) = \frac{Nc}{2} + N - 2^c; \\ A = Nc + N - 2^c.$$

Рассмотрим крайние случаи:

1. $a = b$ $(c = 0)$. В этом случае вычисляется только одна точка спектра и $M = A = N - 1$ — линейная вычислительная сложность.

2. $a = 0,\ b = N - 1$ $(c = s)$. В этом случае вычисляются все компоненты спектра и $M = \frac{N}{2}log_2N,\ A = Nlog_2N$ — вычислительная сложность, соответствующая алгоритму Кули-Тьюки.

5° **Сравнение с другими алгоритмами**

Приведем еще два подхода к решению задачи нахождения внутреннего сегмента спектра сигнала. Первым является вычисление всех компонент и отбрасывание ненужных. Вторым — поточечное вычисление компонент внутреннего сегмента. Рассмотрим каждый из них и определим области, в которых в зависимости от соотношения N и $b-a+1$ эффективен тот или иной алгоритм.

1. Самым очевидным способом вычисления внутреннего сегмента спектра является вычисление всех его компонент по алгоритму Кули-Тьюки и отбрасывание ненужных. Теоретически этот способ всегда хуже предложенного алгоритма, поскольку во время своей работы вычисляет большее количество элементов. Однако на практике существует область, в которой соотношение N и $b-a+1$ таково, что вычислить весь спектр и отбросить ненужные компоненты оказывается эффективнее, нежели вычислять только компоненты внутреннего сегмента. Это объясняется тем, что предложенный алгоритм содержит

дополнительные вычислительные затраты, связанные с более трудоемкой индексацией по отношению к алгоритму Кули-Тьюки.

2. Другим способом вычисления внутреннего сегмента спектра является поточечное вычисление его компонент с использованием алгоритма Герцеля [4]. Для малых длин сегмента этот способ существенно эффективнее обоих рассмотренных методов. Однако при возрастании этих длин алгоритм становится неэффективным.

Таблица 1: Экспериментальные данные

	N						
$b-a+1$	16	32	64	128	256	512	1024
1	G	G	G	G	G	G	G
8	F	P	G	G	G	G	G
16	FP	F	P	P	P	G	G
32		FP	P	P	P	P	P
64			FP	P	P	P	P
128				FP	F	P	P
256					FP	P	P
512						FP	P
1024							FP

В Таблице 1 показаны экспериментальные данные измерения времени работы всех трех алгоритмов. Эксперименты проводились при различных значениях N и $b-a+1$. При каждой фиксированной паре чисел N и $b-a+1$ случайным образом генерировалось 100 различных сигналов. Для каждого сигнала измерялось время работы всех трех алгоритмов, после чего вычислялось среднее время работы каждого алгоритма. В таблице буквой F отмечены области, в которых эффективнее вычислять весь спектр по алгоритму Кули-Тьюки, буквой G — области, в которых эффективнее использовать алгоритм Герцеля, буквой P — области, в которых оптимальные результаты дает предложенный алгоритм.

Таким образом:

- применение алгоритма Герцеля наиболее эффективно при длине сегмента, не превышающей 5%–10% от длины сигнала;

- применение предложенного алгоритма наиболее эффективно при длине сегмента, составляющей 10%–50% от длины сигнала;

- при длине сегмента более 50% длины сигнала эффективнее вычислять весь спектр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cooley J., Tukey J.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series// Math. Comput. 1965. Vol. 19. P. 297-301.

2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Пер. с англ. М., 1989. 448 с.

3. *Малоземов В.Н., Третьяков А.А.* Алгоритм Кули-Тьюки и дискретное преобразование Хаара// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№15). С. 31-34.

4. *Goertzel G.* An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series// Amer. Math. Monthly. 1958. Vol. 65. P. 34-35.

SUMMARY

Pakhomov S.N. The calculation of Fourier spectrum inner segment.

The fast algorithm for the calculation of Fourier spectrum inner segment is elaborated. Efficiency evaluation in comparison with other algorithms is done.

Пахомов С.Н. Вычисление внутреннего сегмента спектра Фурье.

Детально разработан быстрый алгоритм вычисления внутреннего сегмента спектра Фурье. Проведена оценка эффективности в сравнении с другими алгоритмами.

УДК 519.72

П а х о м о в С. Н. Вычисление внутреннего сегмента спектра Фурье// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2003. Вып.__ (№__). С. 00-00.

Работа посвящена быстрому вычислению внутреннего сегмента спектра Фурье. Она содержит описание быстрого алгоритма, доказательство его оптимальности, подсчет количества операций и оценку эффективности в сравнении с другими алгоритмами.

Библиогр. 4 назв. Табл. 1.