БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ*

О. В. Просеков

sc2@pisem.net

6 декабря 2005 г.

Быстрое преобразование Фурье связано с разложением матрицы Фурье на сомножители специальной структуры. Такая факторизация определяется далеко не единственным образом. В [1] были рассмотрены порядки 2, 3, 4, 5, 6. В данной работе продолжается развитие идей изложенных в [1]. Благодаря полному учёту симметрии в матрице Фурье удалось улучшить факторизации, указанные выше, и получить новые для порядков 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 16.

1°. Дискретное преобразование Фурье сигнала $x \in \mathbb{C}_N$, определяемое формулой

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \omega_N^{-kj}, \qquad k \in 0 : N-1, \tag{1}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$, можно записать в виде умножения матрицы на вектор

$$X = \bar{F}_N\, x .$$

Здесь F_N — матрица Фурье, $F_N[k,j] = \omega_N^{kj}$, $k,j \in 0 : N-1$. Быстрое преобразование Фурье (БПФ) основано на приведении формулы (1) к виду [2, с. 429]

$$X = CBA\, x . \tag{2}$$

Здесь B — диагональная матрица, ответственная за умножения, A и C — матрицы, элементы которых равны 0, 1 или -1. Матрицы A и C называются соответственно матрицей предсложений и матрицей постсложений.

Факторизация (2) имеет целью минимизировать число умножений. Чтобы минимизировать число сложений, нужно факторизовать матрицы A и C, т. е.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

перейти к разложению

$$X = C_1 C_2 \dots C_m \, B \, A_n A_{n-1} \dots A_1 \, x \,, \tag{3}$$

в котором сомножители C_k и A_l обладают следующими свойствами: их элементы по-прежнему равны $0, 1$ или -1, но в каждой строке этих сомножителей содержится, по возможности, не более двух отличных от нуля элементов.

Разложение (3) не единственно, поэтому можно ставить дополнительные условия. Например, можно потребовать, чтобы матрицы C_k и A_l были, в основном, симметричными, строки и столбцы линейно независимы, чтобы значение -1 стояло, по возможности, на диагоналях и т. д. Такие дополнительные условия трудно формализовать. В начале мы приведём вывод «совершенных» разложений матрицы Фурье вида (3) при $N = 3, 4, 5, 6$. При этом будут использоваться только элементарные средства.

2°. Введём обозначения

$$a_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \, \cos\!\left(\tfrac{2\pi k}{N}\, j\right), \qquad b_k = -i \sum_{j=1}^{N-1} x_j \, \sin\!\left(\tfrac{2\pi k}{N}\, j\right) \tag{4}$$

поскольку $a_{N-k} = a_k$ и $b_{N-k} = -b_k$, то формула (1) принимает следующий вид

$$X_k = a_k + b_k \,, \quad X_{N-k} = a_k - b_k \,, \qquad k = 0, 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor \,.$$

Отметим, что $b_0 = 0$, и при нечётном N формулы (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_0 + \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (x_j + x_{N-j}) \,, \\
a_k &= x_0 + \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (x_j + x_{N-j}) \, \cos\!\left(\tfrac{2\pi k}{N}\, j\right), \qquad && k = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor \,, \\
b_k &= -i \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (x_j - x_{N-j}) \, \sin\!\left(\tfrac{2\pi k}{N}\, j\right), \qquad && k = 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor \,.
\end{aligned}$$

При чётном N, $b_{N/2} = 0$ и формулы (4) принимают вид

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_0 + x_{N/2} + \sum_{j=1}^{N/2-1} (x_j + x_{N-j}) \,, \\
a_k &= x_0 + (-1)^k \, x_{N/2} + \sum_{j=1}^{N/2-1} (x_j + x_{N-j}) \, \cos\!\left(\tfrac{2\pi k}{N}\, j\right), \quad k = 1, \dots, N/2 - 1 \,,
\end{aligned}$$

$$a_{N/2} = x_0 + (-1)^{N/2}\, x_{N/2} + \sum_{j=1}^{N/2-1} (-1)^j\,(x_j + x_{N-j})\,,$$
$$b_k = -i \sum_{j=1}^{N/2-1} (x_j - x_{N-j})\, \sin\!\left(\tfrac{2\pi k}{N}\, j\right), \qquad k = 1,\ldots,N/2-1\,.$$

По существу, получена факторизация матрицы Фурье F_N следующего вида

$$F_N = A \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} A\,, \tag{5}$$

где C, S — квадратные матрицы с элементами

$$C[k,j] = \cos\!\left(k\, j\, \tfrac{2\pi}{N}\right), \quad S[l,p] = i\, \sin\!\left(l\, p\, \tfrac{2\pi}{N}\right).$$

Здесь $k,j \in 0 : \lfloor N/2 \rfloor$ и $l,p \in 1 : \lfloor N/2 \rfloor$ при нечётном N; $k,j \in 0 : N/2$ и $l,p \in 1 : N/2-1$ при чётном N.

В формуле (5): A — квадратная матрица порядка N следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(при нечётном N) (при чётном N)

Нам потребуется одно элементарное свойство матриц: в предположении, что D — квадратная матрица и определено произведение CBA, справедливо равенство

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & CBA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Случай, когда $N = 2$ тривиален и не нуждается в упрощении:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3°. Обратимся к случаю $N = 3$. Положим $\theta = 2\pi/3$. Согласно (5) имеем

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Факторизуем верхний блок средней матрицы в правой части (6). Для этого приведём его к диагональному виду:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), приходим к окончательной формуле

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 \\ 1 \\ i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Разложение (8) можно представить в виде $F_3 = A_1 A_2 \, B \, A_2 A_1 \, x$, где A_1, A_2 — симметричные матрицы.

4°. Аналогичным образом можно разобраться со случаем $N = 6$. Положим $\theta = \pi/3$. Согласно (5) имеем

$$F_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\theta & -\cos\theta & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\cos\theta & -\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sin\theta & i\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sin\theta & i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Факторизуем верхний блок средней матрицы в правой части (9):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta & -\cos\theta & -1 \\ 1 & -\cos\theta & -\cos\theta & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Первую матрицу правой части приведём к диагональному виду:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\theta - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Разберёмся с нижним блоком средней матрицы в правой части (9):

$$\begin{bmatrix} -i\sin\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & i\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\sin\theta & 0 \\ 0 & i\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Объединив (9)–(11), придём к окончательной формуле

$$F_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} -\cos\theta - 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\cos\theta - 1 \\ i\sin\theta \\ i\sin\theta \end{bmatrix} \times$$

$$
\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (12)
$$

Разложение (12) можно представить в виде $F_6 = A_1 A_3 \, B \, A_3 A_2 A_1$, где A_1, A_2, A_3 — симметричные матрицы.

5°. Перейдём к случаю $N = 4$. Согласно (5) имеем

$$
F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (13)
$$

Факторизуем верхний блок средней матрицы в правой части (13):

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (14)
$$

Подставив (14) в (13), получим

$$
F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (15)
$$

Формулу (15) можно упростить, если перемножить первые две и последние две матрицы в правой её части. Придём к окончательной формуле

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Разложение (16) можно представить в виде $X = A_1\, B\, A_2 A_1\, x$, где A_1, A_2 — симметричные матрицы.

6°. Рассмотрим случай $N = 5$. Обозначим $\theta = 2\pi/5$. Согласно (5) имеем

$$F_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 1 & \cos 2\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\,\sin\theta & i\,\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & i\,\sin 2\theta & i\,\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Средняя матрица в правой части (17) имеет блочно-диагональную структуру. Для факторизации этих блоков нам потребуются следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливы формулы*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} c & a \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Доказательство. Начнём с формулы (18). Пусть

$$u_0 = a\,x_0 + b\,x_1\,,$$
$$u_1 = b\,x_0 + a\,x_1\,.$$

Поскольку

$$u_0 + u_1 = (a+b)(x_0 + x_1)\,,$$
$$u_0 - u_1 = (a-b)(x_0 - x_1)\,,$$

то

$$u_0 = \tfrac{1}{2}\big[(a+b)(x_0+x_1) + (a-b)(x_0-x_1)\big]\,,$$
$$u_1 = \tfrac{1}{2}\big[(a+b)(x_0+x_1) - (a-b)(x_0-x_1)\big]\,.$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a+b & -(a-b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0+x_1 \\ x_0-x_1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

что равносильно (18).

Установим формулу (19). Пусть

$$v_0 = c\,x_0 + a\,x_1\,,$$
$$v_1 = a\,x_0 + b\,x_1\,.$$

Поскольку

$$v_0 = (c-a)\,x_0 + a\,(x_0+x_1)\,,$$
$$v_1 = (b-a)\,x_1 + a\,(x_0+x_1)\,,$$

то

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-a & 0 & a \\ 0 & b-a & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_0+x_1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\operatorname{diag}\begin{bmatrix} c-a \\ b-a \\ a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

что равносильно (19). Предложение доказано. □

Факторизуем верхний блок средней матрицы в правой части (17):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \cos 2\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(\cos\theta+\cos 2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 2\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Далее, воспользовавшись формулой (7), получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \cos 2\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Согласно формуле (19)

$$\begin{bmatrix} -i\,\sin\theta & i\,\sin 2\theta \\ i\,\sin 2\theta & i\,\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} i\,(\sin\theta + \sin 2\theta) \\ -i\,(\sin\theta - \sin 2\theta) \\ -i\,\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

На основании (17), (20) и (21) приходим к окончательной формуле

$$F_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,(\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}\,(\cos\theta - \cos 2\theta) \\ i\,(\sin\theta + \sin 2\theta) \\ -i\,(\sin\theta - \sin 2\theta) \\ -i\,\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Разложение (22) можно представить в виде $F_5 = A_1 A_2 A_3^T \, B \, A_3 A_2 A_1$, где A_1, A_2 — симметричные матрицы.

7°. Таким же образом можно получить факторизации матриц Фурье для других малых порядков. В приложении приведены факторизации матрицы Фурье порядков от 2 до 12 и 16. В таблице 1 указаны характеристики соответствующих алгоритмов БПФ.

В заключение отметим, что практическую ценность представляет использование алгоритмов БПФ малых порядков в составе алгоритмов БПФ при

Таблица 1. Характеристики алгоритмов БПФ

Порядок алгоритма БПФ	Число множителей в факторизации	Порядок диагональной матрицы	Число умножений	Число сложений
2	1	2	0	2
3	5	3	2	6
4	3	4	0	8
5	7	6	5	17
6	6	6	4	18
7	7	9	8	36
8	6	8	2	26
9	7	12	10	42
10	8	12	10	44
11	9	21	20	84
12	7	12	8	48
16	9	18	10	74

$N = n_1 n_2 \cdots n_s$. В этом случае разложение матрицы Фурье содержит множитель $I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}$ [3, 4]. Данный множитель позволяет использовать векторные и параллельные операции, что особенно актуально (в связи с развитием современных технологий) для реализации БПФ.

Рассмотрим пример. Пусть требуется вычислить вектор $X = (I_2 \otimes F_2 \otimes I_2)\, x$. По определению кронекерова умножения [5]

$$I_2 \otimes F_2 \otimes I_2 = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ I_2 & -I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{— параллельно-векторная сумма;}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{— параллельно-векторная разность.}$$

Таким образом, операции сложения и вычитания двух чисел заменяются на параллельные операции сложения и вычитания векторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *О быстром преобразовании Фурье малых порядков* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. 1 (№ 1). С. 36–45.

2. Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.* М.: Мир, 1989. 448 с.

3. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Факторизация Кули-Тьюки матрицы Фурье* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 7 и 14 апреля 2004 г.

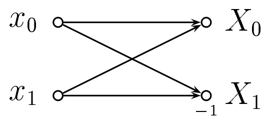
4. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Факторизация Гуда матрицы Фурье* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 5 мая 2004 г.

5. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 24 и 31 марта 2004 г.

Приложение. Алгоритмы БПФ порядков 2–12, 16

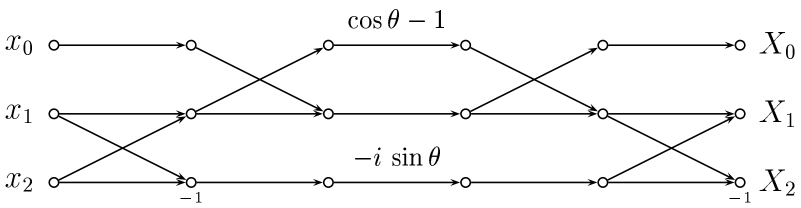
Ниже приведены факторизации матриц Фурье порядков 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 16. Соответствующие алгоритмы БПФ представлены в виде графических схем. Так же указано число не тривиальных арифметических операций в алгоритмах (тривиальные умножения на ± 1 и $\pm i$ не учитываются).

Алгоритм БПФ порядка 2: 0 умножений, 2 сложения.



$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 3: 2 умножения, 6 сложений.

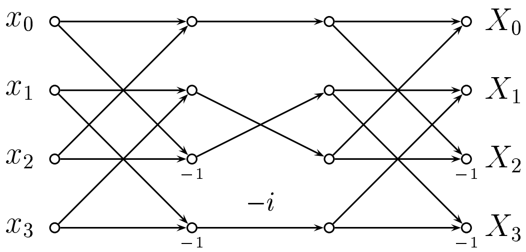


$$F_3 = A_1 A_2\, M\, A_2 A_1\,,$$

где A_1, A_2 — симметричные матрицы. $\theta = 2\pi/3$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 \\ 1 \\ i\,\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 4: 0 умножений, 8 сложений.

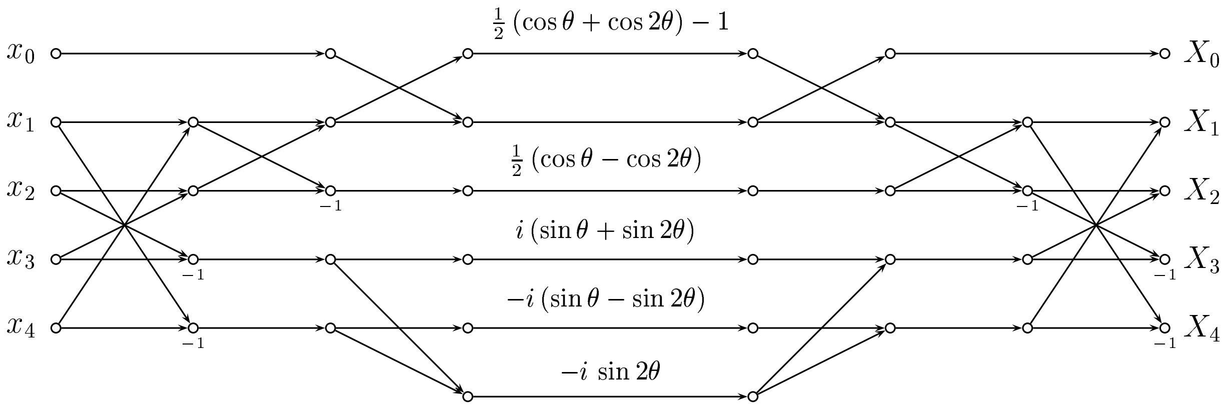


$$F_4 = A_1\, M\, A_2 A_1\,,$$

где A_1, A_2 — симметричные матрицы.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 5:   5 умножений, 17 сложений.

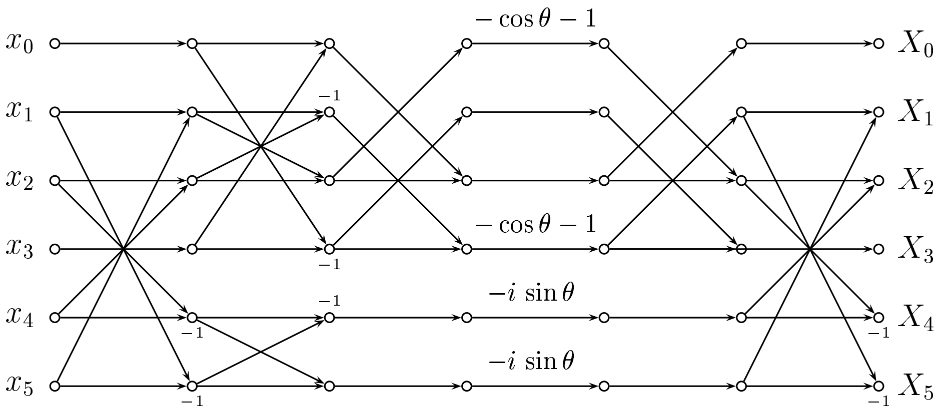


$$F_5 = A_1 A_2 A_3^T\, M\, A_3 A_2 A_1\,,$$

где A_1, A_2 — симметричные матрицы. $\theta = 2\pi/5$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) \\ -i\,(\sin\theta + \sin 2\theta) \\ i\,(\sin\theta - \sin 2\theta) \\ i\ \sin 2\theta \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 6: 4 умножения, 18 сложений.

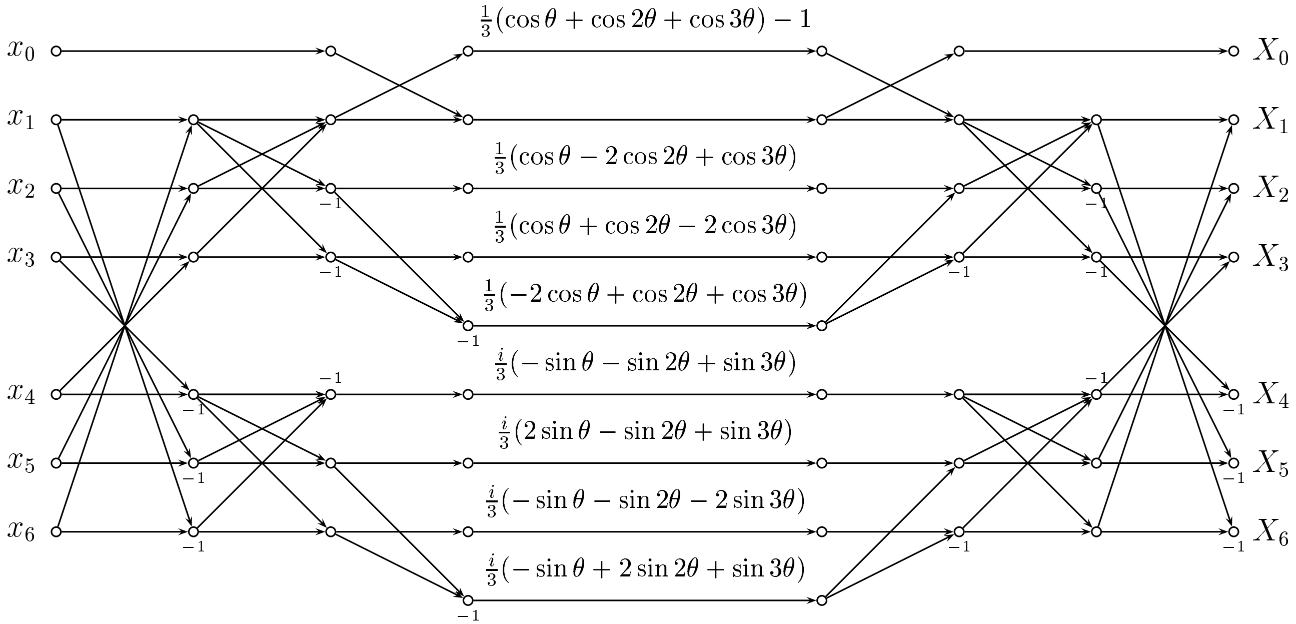


$$F_6 = A_1 A_3\, M\, A_3 A_2 A_1\,,$$

где A_1, A_2, A_3 — симметричные матрицы. $\theta = \pi/3$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} -\cos\theta - 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\cos\theta - 1 \\ i\,\sin\theta \\ i\,\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 7: 8 умножений, 36 сложений.



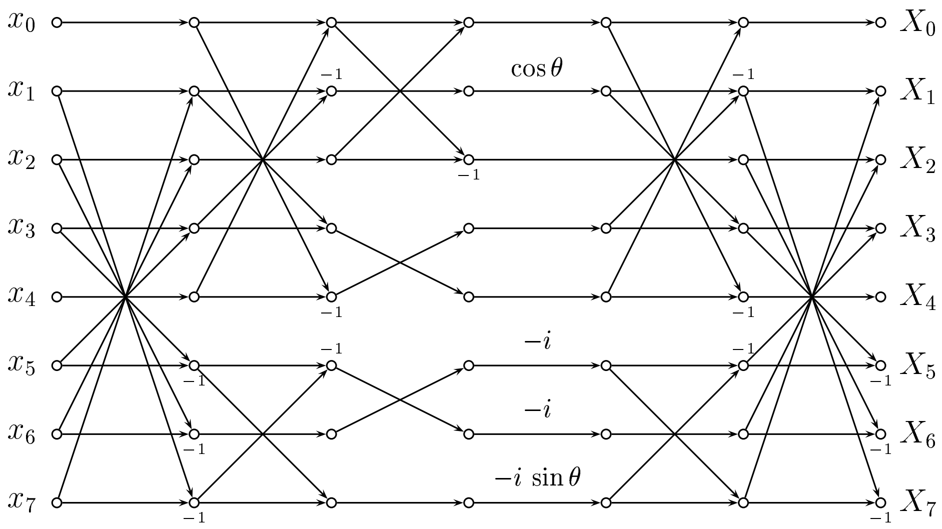
$$F_7 = A_1 A_2 A_3^T \, M \, A_3 A_2 A_1 \,,$$

где A_1, A_2 — симметричные матрицы. $\theta = 2\pi/7$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$
A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M = \mathrm{diag} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta) - 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3}\,(\cos\theta - 2\cos 2\theta + \cos 3\theta) \\ \frac{1}{3}\,(\cos\theta + \cos 2\theta - 2\cos 3\theta) \\ \frac{1}{3}\,(-2\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta) \\ \frac{i}{3}\,(\sin\theta + \sin 2\theta - \sin 3\theta) \\ \frac{i}{3}\,(-2\sin\theta + \sin 2\theta - \sin 3\theta) \\ \frac{i}{3}\,(\sin\theta + \sin 2\theta + 2\sin 3\theta) \\ \frac{i}{3}\,(\sin\theta - 2\sin 2\theta - \sin 3\theta) \end{bmatrix}.
$$

Алгоритм БПФ порядка 8: 2 умножения, 26 сложений.

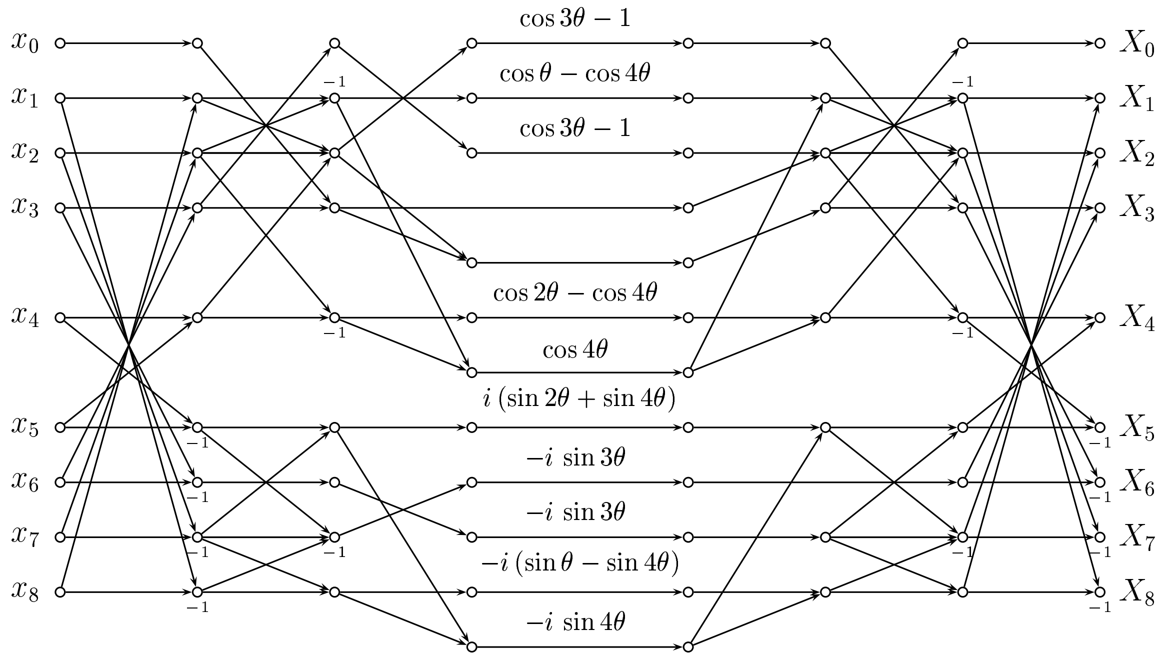


$$
F_8 = A_1 A_2\, M\, A_3 A_2 A_1\,,
$$

где A_1, A_2, A_3 — симметричные матрицы. $\qquad \theta = \pi/4$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&-1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix},\ M = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} 1\\ \cos\theta\\ 1\\ 1\\ 1\\ i\\ i\\ i\,\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 9: 10 умножений, 42 сложения.



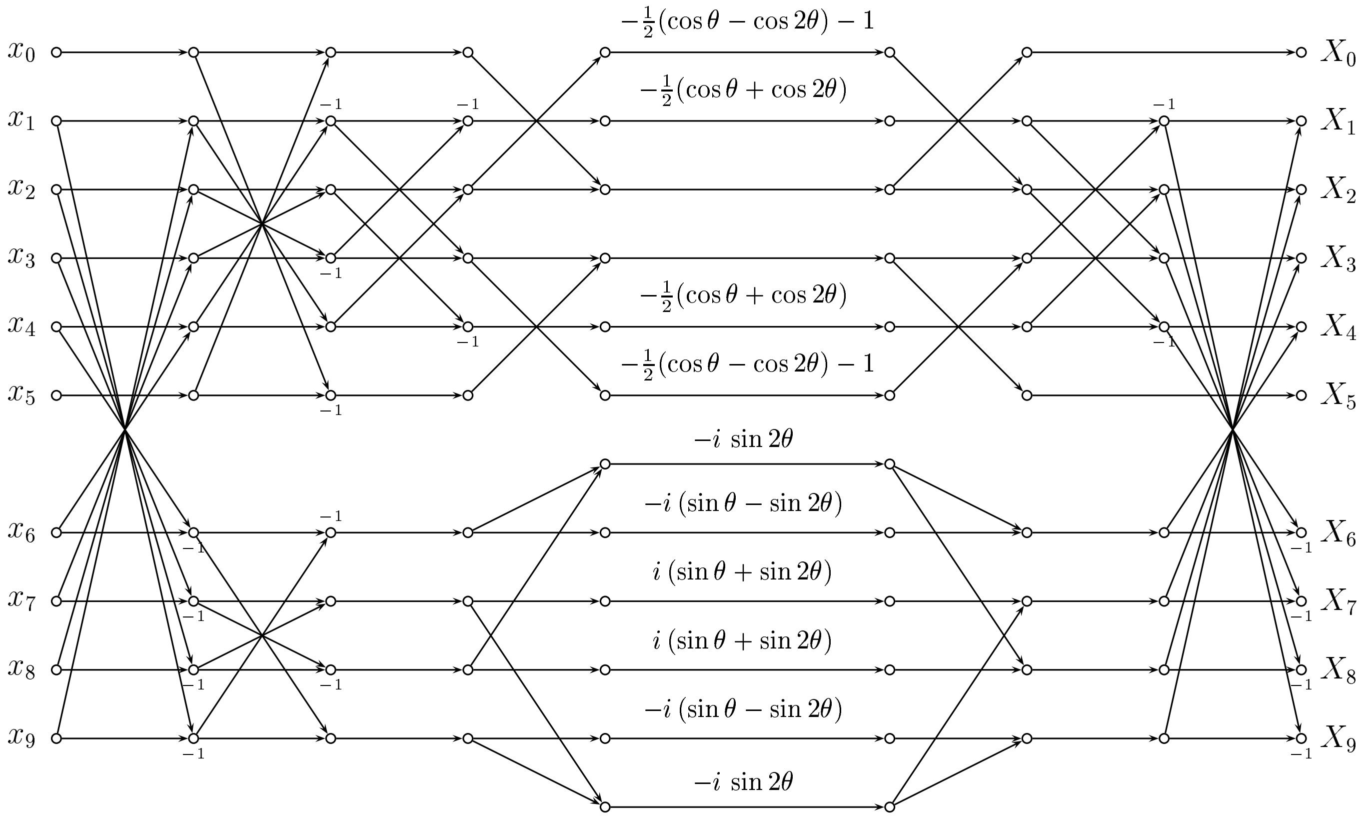
$$F_9 = A_1 A_2 A_4\, M\, A_3 A_2 A_1\,,$$

где A_1, A_2 — симметричные матрицы. $\qquad \theta = 2\pi/9$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad M = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \cos 3\theta - 1\\ \cos\theta - \cos 4\theta\\ \cos 3\theta - 1\\ 1\\ 1\\ \cos 2\theta - \cos 4\theta\\ \cos 4\theta\\ -i\,(\sin 2\theta + \sin 4\theta)\\ i\,\sin 3\theta\\ i\,\sin 3\theta\\ i\,(\sin\theta - \sin 4\theta)\\ i\,\sin 4\theta \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 10:   10 умножений, 44 сложения.



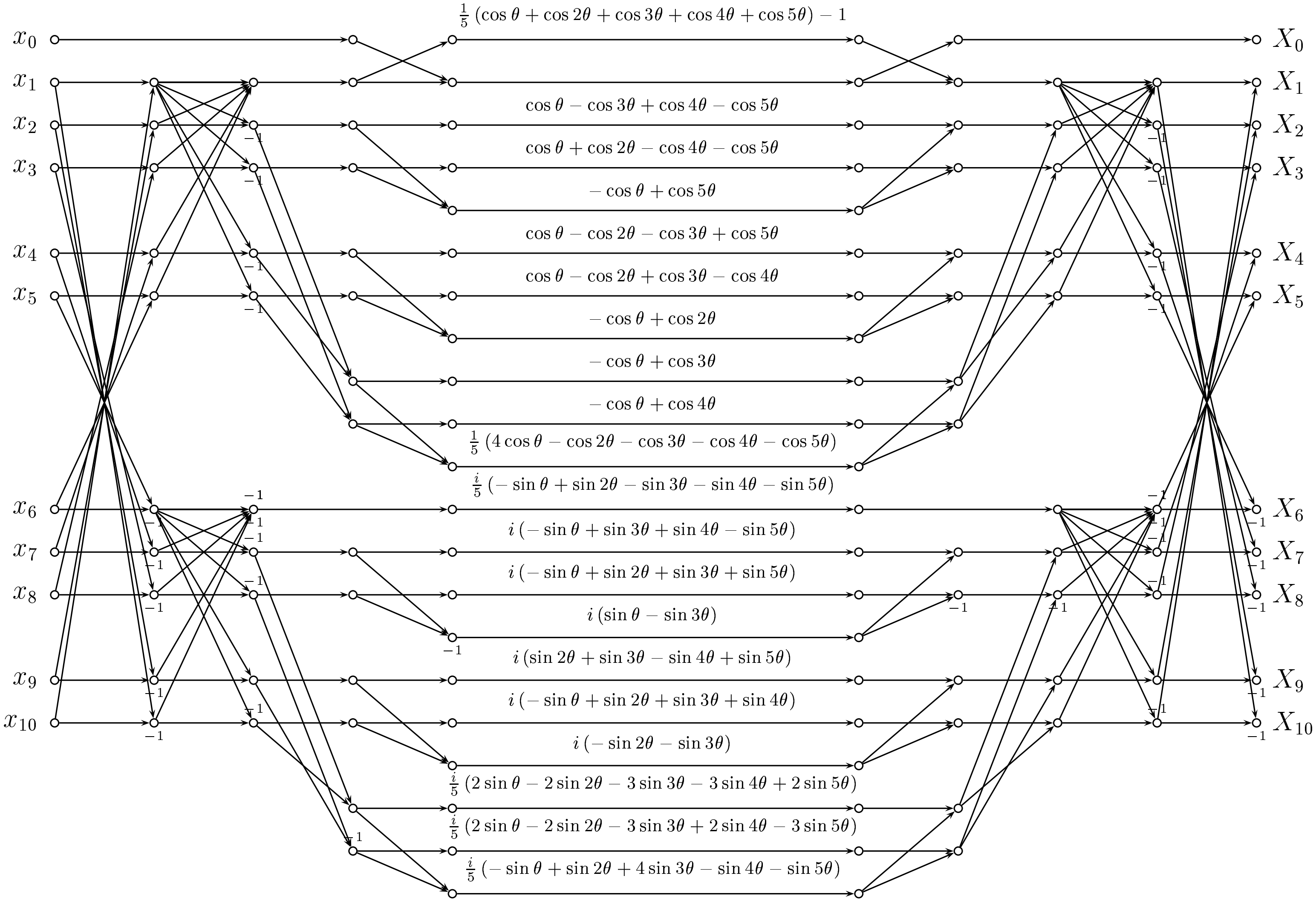
$$F_{10} = A_1 A_3 A_4^T\, M\, A_4 A_3 A_2 A_1\,,$$

где A_1, A_2, A_3 — симметричные матрицы. $\quad \theta = \pi/5$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}, \quad M = \mathrm{diag} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) - 1\\ -\frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta)\\ 1\\ 1\\ -\frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta)\\ -\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) - 1\\ i\,\sin 2\theta\\ i\,(\sin\theta - \sin 2\theta)\\ -i\,(\sin\theta + \sin 2\theta)\\ -i\,(\sin\theta + \sin 2\theta)\\ i\,(\sin\theta - \sin 2\theta)\\ i\,\sin 2\theta \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 11:   20 умножений, 84 сложения.



$$F_{11} = A_1 A_2 A_3^T A_4^T \, M \, A_4 A_3 A_2 A_1 \,,$$

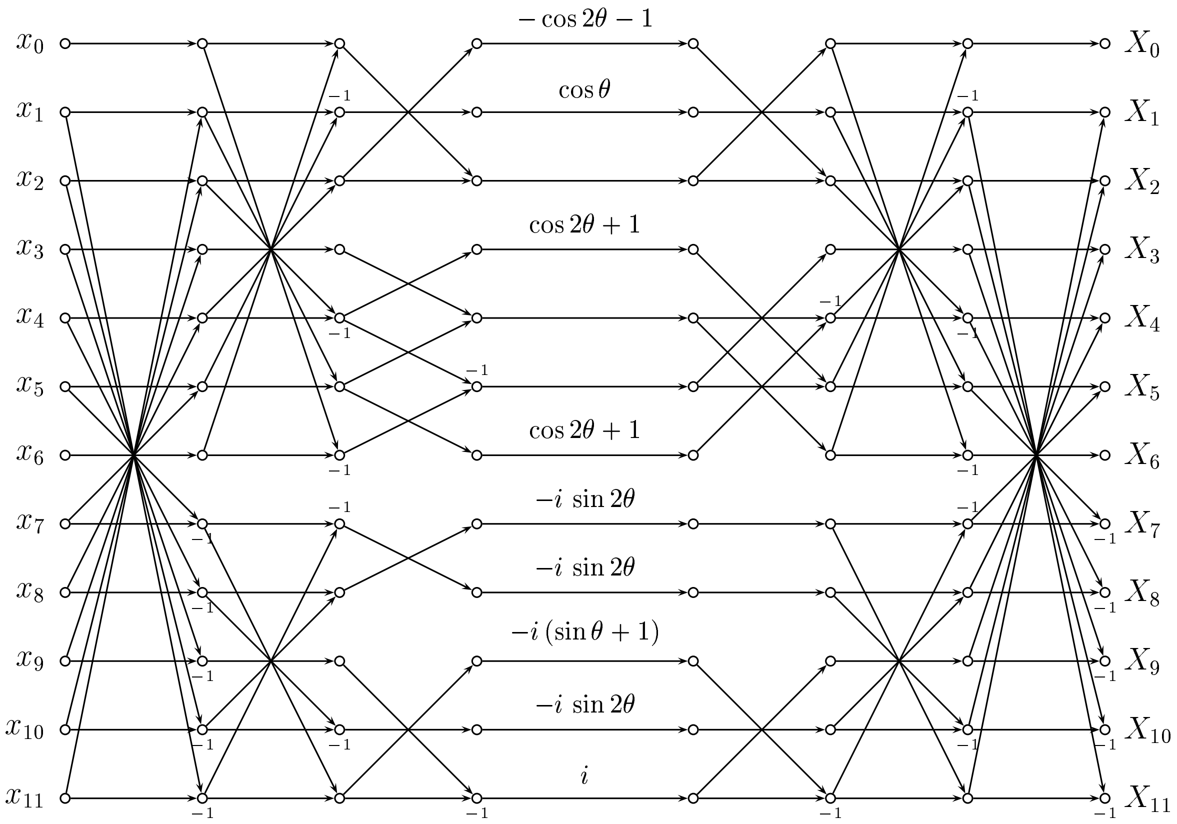
где A_1, A_2 — симметричные матрицы. $\theta = 2\pi/11$

$$A_1 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{bmatrix},$$

$$
A_4 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}, \quad M = \operatorname{diag}\begin{bmatrix}
\frac{1}{5}\left(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta\right) - 1 \\
1 \\
\cos\theta - \cos 3\theta + \cos 4\theta - \cos 5\theta \\
\cos\theta + \cos 2\theta - \cos 4\theta - \cos 5\theta \\
-\cos\theta + \cos 5\theta \\
\cos\theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta + \cos 5\theta \\
\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \cos 4\theta \\
-\cos\theta + \cos 2\theta \\
-\cos\theta + \cos 3\theta \\
-\cos\theta + \cos 4\theta \\
\frac{1}{5}\left(4\cos\theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta - \cos 4\theta - \cos 5\theta\right) \\
\frac{i}{5}\left(-\sin\theta + \sin 2\theta - \sin 3\theta - \sin 4\theta - \sin 5\theta\right) \\
-i\left(-\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta - \sin 5\theta\right) \\
-i\left(-\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta\right) \\
-i\left(\sin\theta - \sin 3\theta\right) \\
-i\left(\sin 2\theta + \sin 3\theta - \sin 4\theta + \sin 5\theta\right) \\
-i\left(-\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta\right) \\
-i\left(-\sin 2\theta - \sin 3\theta\right) \\
-\frac{i}{5}\left(2\sin\theta - 2\sin 2\theta - 3\sin 3\theta - 3\sin 4\theta + 2\sin 5\theta\right) \\
-\frac{i}{5}\left(2\sin\theta - 2\sin 2\theta - 3\sin 3\theta + 2\sin 4\theta - 3\sin 5\theta\right) \\
-\frac{i}{5}\left(-\sin\theta + \sin 2\theta + 4\sin 3\theta - \sin 4\theta - \sin 5\theta\right)
\end{bmatrix}.
$$

Алгоритм БПФ порядка 12:   8 умножений, 48 сложений.



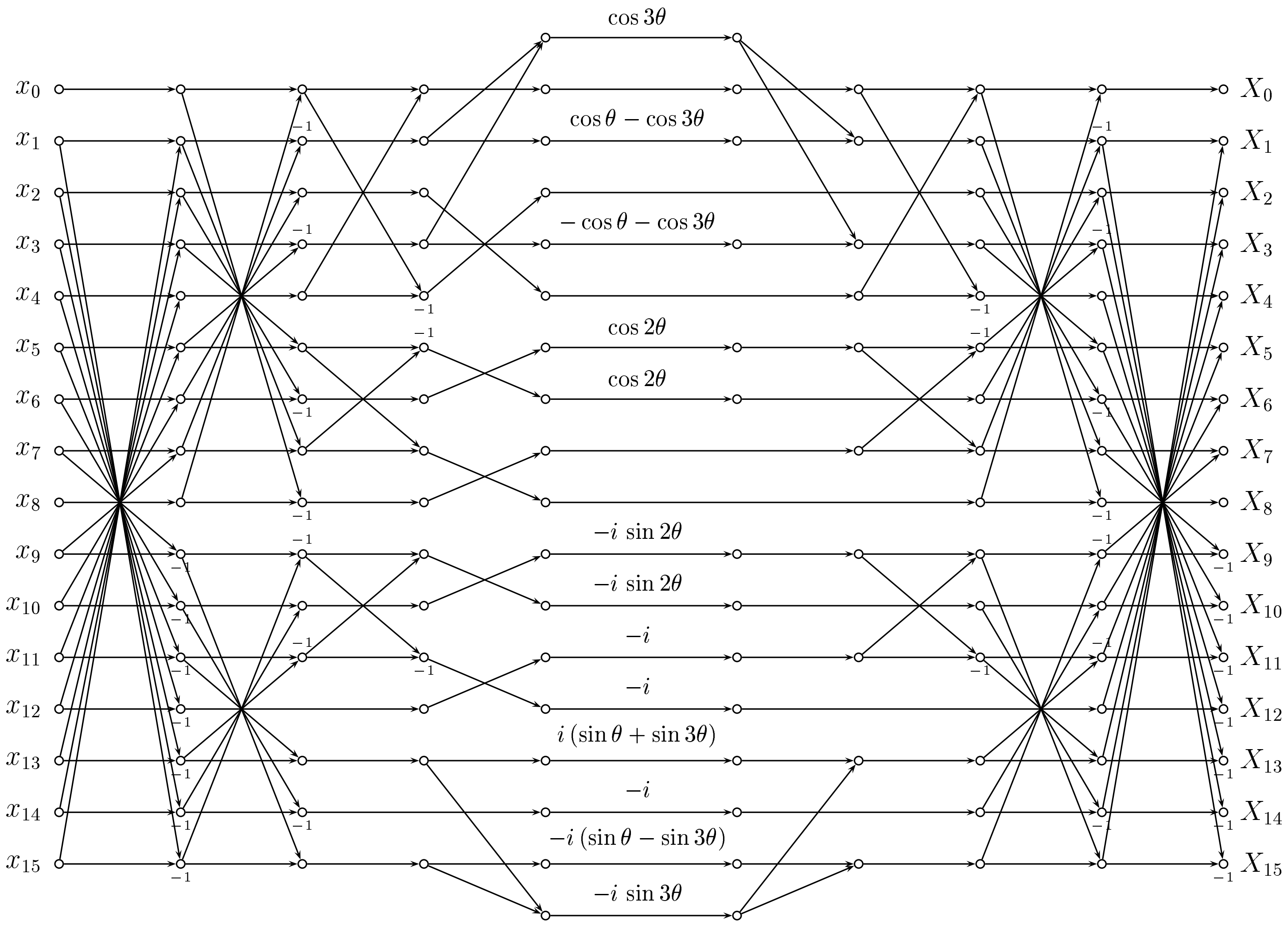
$$F_{12} = A_1 A_2 A_4\, M\, A_3 A_2 A_1\, x\,,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — симметричные матрицы. $\quad \theta = \pi/6$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M = \mathrm{diag} \begin{bmatrix} -\cos 2\theta - 1 \\ \cos\theta \\ 1 \\ \cos 2\theta + 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cos 2\theta + 1 \\ i \sin 2\theta \\ i \sin 2\theta \\ i\,(\sin\theta + 1) \\ i \sin 2\theta \\ -i \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм БПФ порядка 16: 10 умножений, 74 сложения.



$$F_{16} = A_1 A_2 A_3 A_5 \, M \, A_4 A_3 A_2 A_1 \,,$$

где A_1, A_2, A_3 — симметричные матрицы. $\qquad \theta = \pi/8$

$$A_1 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}, \quad
A_2 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},$$

$$
A_3 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{bmatrix}, \quad
A_4 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

$$M = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \cos 3\theta \\ 1 \\ \cos\theta - \cos 3\theta \\ 1 \\ -\cos\theta - \cos 3\theta \\ 1 \\ \cos 2\theta \\ \cos 2\theta \\ 1 \\ 1 \\ i\ \sin 2\theta \\ i\ \sin 2\theta \\ i \\ i \\ -i\,(\sin\theta + \sin 3\theta) \\ i \\ i\,(\sin\theta - \sin 3\theta) \\ i\ \sin 3\theta \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}.$$