ИНТЕРАКТИВНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ БЕЗЬЕ*

А. Р. Форрест

Май 1971

1. Введение

В *вычислительной геометрии* (компьютерное представление, анализ и синтез информации о *форме*) методы интерполяции и аппроксимации часто используются и для кривых, и для поверхностей. Однако свойства «формы» отличаются от свойств функций, и хорошо известные методы интерполяции функций не всегда подходят. Например, форма не зависит от выбора осей координат и параметрически заданные кривые и поверхности часто используются только по этой причине. Параметрическая запись будет использоваться в данной работе как для удобства, так и для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что рассматривается аппроксимация формы, а не функции. Иногда функция, задающая форму, известна — кривая может быть дугой окружности. В таких случаях могут использоваться методы простого подбора, но в общем случае требуется достаточно точное приближение (в пределах заданного допуска), которое сохраняет *характер* кривой или поверхности и является *гладким*.

В данной работе рассматривается *интерактивное создание* кривых с нуля и *интерактивное приближение* кривых. Математические методы изменены или усовершенствованы для работы с формами, и они также должны быть исправлены когда присутствует взаимодействие между компьютером и человеком. Очень элегантный метод был разработан Безье (1968a, 1968b, 1970) из Regie Renault. Данная работа развивает математические аспекты методов Безье для интерактивной аппроксимации.

---

* Forrest A. R. Interactive interpolation and approximation by Bezier polinomials // The Computer Journal. 1972. V. 15. No. 1. P. 71–79. [Перевод на русский язык Н. В. Чашникова]

В автомобильной промышленности возникает задача нахождения математического представления для глиняной модели или эскиза, разработанного дизайнером. Данные имеют два основных сорта ошибок: ошибки измерения и ошибки, вызванные техникой работы дизайнера. Первые в некоторой степени предсказуемы, но последние видны только самому дизайнеру. Не существует поддающегося определению «наилучшего» соответствия, вместо этого качество соответствия определяется человеком. Таким образом, логично использовать интерактивный метод, поскольку нельзя ожидать, чтобы полностью автоматический метод мог отличить намерение дизайнера от его ошибок, и в лучшем случае такой метод будет использовать действия, разработанные для данного конкретного случая. Чтобы интерактивный метод был пригоден, его использование должно быть лёгким, и от пользователя не должно требоваться знание математических принципов. В Renault данные, полученные с маленькой глиняной модели или нарисованного от руки эскиза, вычерчиваются в полный размер на графопостроителе. Далее дизайнер оценивает параметры аппроксимирующей кривой, которая после этого рисуется машиной. Трёхмерные кривые аппроксимируются по проекциям на две плоскости. Приемлемая аппроксимация обычно достигается в несколько итераций путём регулирования параметров кривой. В некоторых случаях, разумеется, дизайнер произведёт некоторые переделки и подгонку. В действительности система предоставляет дизайнеру «совершенную» среду для работы вместо несовершенной типа глины, поскольку созданные фигуры будут в основном гладкими, и неправильности должны задаваться специально. Значительно проще создать вмятину на кривой, чем удалить ненужную вмятину, вызванную плохими данными.

2. Основной принцип

В методе Безье дуга кривой задаётся ломаной, две вершины которой являются концами дуги. Для кривой, которая задаётся полиномом степени n или представляется линейной комбинацией $(n+1)$ линейно независимых функций, ломаная будет иметь $n+1$ вершину. Пусть вершины определяются векторами $\vec{P}(i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\vec{P}(0)$ — начальная точка кривой, $\vec{P}(n)$ — конечная. (Через $\vec{P}(t)$ мы будем обозначать вектор из N компонент в вещественном декартовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Обычно $N = 2$ или 3.)

Кривая Безье, определяемая ломаной, в общем случае не проходит через вершины, отличные от $\vec{P}(0)$ и $\vec{P}(n)$, но её производная в $\vec{P}(0)$ и $\vec{P}(n)$ определяется вершинами ломаной таким образом, что кривая в точке $\vec{P}(0)$ касается первого отрезка ломаной, а в точке $\vec{P}(n)$ — последнего. В общем случае m-я производная в точке $\vec{P}(0)$ зависит от вершин $\vec{P}(0), \ldots, \vec{P}(m)$, а m-я производная в точке $\vec{P}(m)$ — от вершин $\vec{P}(n-m), \ldots, \vec{P}(n)$. Есть два основных способа задания кривой — в терминах вершин ломаной и в терминах отрезков ломаной. Мы сначала рассмотрим последний способ, так как он использовался Безье (1968a, 1968b, 1970).

Пусть отрезки ломаной задаются векторами $\vec{a}(i)$, где

$$\vec{a}(i) = \vec{P}(i) - \vec{P}(i-1), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.1}$$

и пусть $\vec{a}(0) = \vec{P}(0)$.

Тогда кривая Безье задаётся формулой

$$\vec{Q}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}(i) f_{in}(t), \tag{2.2}$$

где t — параметр, а функции $f_{in}(t)$ удовлетворяют упомянутым ранее конечным условиям. Так как мы будем использовать немного иной подход, нам не потребуется углубляться в детали этих условий (см. Безье 1968a, 1968b, 1970). Во всех случаях $f_{0n}(t) \equiv 1$.

В случае, когда функции $f_{in}(t)$ являются полиномами степени n и $t \in [0,1]$, имеем:

$$f_{in}(t) = \frac{-(-t)^i}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}\Phi_n(t)}{dt^{i-1}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.3}$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1-(1-t)^n}{t}. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что

$$\vec{Q}(0) \equiv \vec{P}(0), \qquad \vec{Q}(n) \equiv \vec{P}(n).$$

3. Полином Безье в общем случае

Есть две причины для задания кривых Безье в терминах вершин ломаной, а не её отрезков. Во-первых, формулировки становятся изящнее, а во-вторых лучше программировать в терминах абсолютных векторов, а не цепочки относительных, в случаях, когда применяются такие преобразования векторов, как поворот, поскольку ошибки округления не будут накапливаться, что привело бы к плохим чертежам. Это особенно заметно, когда преобразования выполняются на небольшом вспомогательном графическом компьютере для ускорения работы.

Пусть аппроксимируемая кривая задана при помощи функции $\vec{f}(t)$, а через $\vec{g}(t) = Be_n(\vec{f};t)$ обозначена полиномиальная аппроксимация по Безье степени n для $\vec{f}(t),\ t \in [0,1]$. Пусть $\vec{f}^*\left(\frac{i}{n}\right)$ — вершины ломаной, $0 \leqslant i \leqslant n$. Звёздочка используется для того, чтобы показать, что вершины ломаной не лежат на аппроксимируемой кривой, но некоторым образом с ней связаны. Тогда

$$Be_n(\vec{f};t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n}\right) J_{ni}(t) = \tag{3.1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n}\right) C_n^i t^i (1-t)^{n-i}. \tag{3.2}$$

Здесь J_{ni} — интерполяционная функция для i-й вершины ломаной из n отрезков. (Автор использует $I_{ri}(t)$ для обозначения интерполяционной функции, двойственной к r-й производной в точке $t = t_i$ *на* кривой; $J_{ni}(t)$ используется чтобы подчеркнуть, что эти интерполяционные функции двойственны к вершинам, которые в общем случае *не* лежат на кривой.)

Заметим, что

$$\vec{f}^*\left(\tfrac{0}{n}\right) \equiv \vec{f}(0), \qquad \vec{f}^*\left(\tfrac{n}{n}\right) \equiv \vec{f}(1).$$

Интерполяционные функции $J_{ni}(t)$ обладают следующими свойствами:

$$J_{n0}(0) = 1, \quad J_{n0}^{(p)}(1) = 0, \qquad 0 \leqslant p < n, \tag{3.3}$$

$$J_{nn}(1) = 1, \quad J_{nn}^{(q)}(0) = 0, \qquad 0 \leqslant q < n, \tag{3.4}$$

где индексы (p) и (q) означают производные по t; и для $0 \leqslant i \leqslant n-1$:

$$J_{ni}^{(p)}(0) = 0, \qquad 0 \leqslant p < i, \tag{3.5}$$

$$J_{ni}^{(q)}(1) = 0, \qquad 0 \leqslant q < n-i, \tag{3.6}$$

$$J_{ni}^{(i)}(0) = (-1)^i J_{n0}^{(i)}(0) = \frac{n!}{(n-i)!}, \tag{3.7}$$

$$J_{ni}^{(n-i)}(1) = (-1)^{n-i} J_{nn}^{(n-i)}(1) = (-1)^{n-i} \frac{n!}{(n-i)!}. \tag{3.8}$$

Кроме того,

$$J'_{ni}\left(\tfrac{i}{n}\right) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{3.9}$$

то есть интерполяционная функция достигает максимума на отрезке $[0,1]$ в точке $t = i/n$. Максимальное значение равно

$$J_{ni}\left(\tfrac{i}{n}\right) = C_n^i \, \frac{i^i \, (n-i)^{n-i}}{n^n}. \tag{3.10}$$

Следовательно вершина $\vec{f}^*(i/n)$ оказывает максимальное влияние на форму кривой $Be_n(\vec{f};t)$ в точке $t = i/n$.

Полиномы Безье, в параметрической форме, не зависят от осей координат, поскольку интерполяционные функции удовлетворяют соотношению Коши:

$$\sum_{i=0}^{n} J_{ni}(t) = 1 \tag{3.11}$$

(так как функции $J_{ni}(t)$ являются слагаемыми биномиального разложения для $((1-t)+t)^n$).

Из биномиальной формы функций $J_{ni}(t)$ следует соотношение симметрии:

$$J_{ni}(t) \equiv J_{n,n-i}(t). \tag{3.12}$$

Используя $\vec{g}(t)$ вместо $Be_n(\vec{f};t)$ для краткости, выразим значения производных полинома Безье на концах через вершины ломаной:

$$\vec{g}^{(p)}(0) = \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} C_p^i \, \vec{f}^{*}\left(\tfrac{i}{n}\right), \tag{3.13}$$

$$\vec{g}^{(q)}(1) = \frac{n!}{(n-q)!} \sum_{i=0}^{q} (-1)^{i} C_q^i \, \vec{f}^{*}\left(\tfrac{n-i}{n}\right). \tag{3.14}$$

Наоборот, в терминах производных на концах:

$$\vec{f}^{*}\left(\tfrac{i}{n}\right) = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \, \frac{(n-k)!}{n!} \, \vec{g}^{(k)}(0), \tag{3.15}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^k \, \frac{(n-k)!}{n!} \, \vec{g}^{(k)}(1). \tag{3.16}$$

Эти соотношения могут быть полезны при рассмотрении кривых, составленных из нескольких полиномов Безье; происхождение этих соотношений очевидно.

В общем случае на отрезке $[a,b]$ полином Безье степени n может быть записан следующим образом:

$$Be_n(\vec{f};t) = \sum_{i=0}^{n} f^{*}\left(\frac{(n-i)a+ib}{n}\right) C_n^i \, \frac{(t-a)^i (b-t)^{n-i}}{(b-a)^n}. \tag{3.17}$$

Для вычисления часто удобно использовать разложение полинома Безье в сумму степеней; коэффициенты такого разложения могут быть получены из вершин ломаной следующим методом:

$$Be_n(\vec{f};t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{C}_i \, t^i, \tag{3.18}$$

где

$$\vec{C}_i = C_n^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+k} C_i^k \, \vec{f}^* \left(\tfrac{k}{n}\right), \tag{3.19}$$

то есть

$$\vec{C}_i = C_n^i \nabla_i^i \left\{ \vec{f}^* \left(\tfrac{i}{n}\right) \right\}, \tag{3.20}$$

где ∇_i — оператор нисходящей конечной разности:

$$\nabla_i \left\{ \vec{f}^* \left(\tfrac{i}{n}\right) \right\} = \vec{f}^* \left(\tfrac{i}{n}\right) - \vec{f}^* \left(\tfrac{i-1}{n}\right). \tag{3.21}$$

Мы полагаем $\vec{f}^* \left(\tfrac{i}{n}\right) \equiv 0$ для $i < 0$.

4. Сравнение с полиномами Бернштейна

Полиномы Безье обладают значительным сходством с полиномами Бернштейна (Дэвис, 1963):

$$Bn(\vec{f}; t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{f} \left(\tfrac{i}{n}\right) C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \tag{4.1}$$

где $n+1$ точка $\vec{f}(i/n)$ равномерно относительно переменной t распределена по дуге аппроксимируемой кривой. Полиномы Бернштейна обычно упоминаются в теории интерполяции в доказательстве теоремы Вейерштрасса об аппроксимации (Дэвис, 1963); $Bn(\vec{f}; t)$ является равномерным приближением $\vec{f}(t)$ для достаточно больших n, если $\vec{f}(t)$ непрерывна, и равномерно сходится к $\vec{f}(t)$ вместе с производными при $n \to \infty$.

Будет видно, что полиномы Бернштейна определяются ломаной, вершины которой лежат *на* аппроксимируемой кривой. В отличие от полиномов Бернштейна нам необходима принадлежность к C^n (непрерывность вплоть до n-й производной включительно) для кривой $\vec{f}(t)$, если мы получаем вершины ломаной для полинома Безье n-й степени из производных $\vec{f}(t)$. Однако этим обеспечивается, что процесс сходимости пойдёт быстрее, и, в частности, что $Be(\vec{f}; t) \equiv \vec{f}(t)$, если $\vec{f}(t)$ — полином степени m и $m < n$. Однако было бы неправильно думать, что вершины ломаной могут быть определены только при помощи значений производных на концах. Когда полиномы Безье используются для интерактивной аппроксимации неаналитических кривых, таких, как линии кузова автомобиля (как в Renault), вершины ломаной могут выбираться на глаз, и сходимость становится делом вкуса; подобный подход может использоваться и для интерактивной аппроксимации аналитических функций, но в этом случае величина ошибки может быть измерена.

Если, с другой стороны, мы используем методы Безье для построения кривой с нуля, то в в известном смысле мы аппроксимируем ломаную или дугу через вершины (Гордон, 1971). В таких обстоятельствах метод Безье является просто распространением на векторы метода Бернштейна. Таким образом, при обсуждении сходимости и изменения свойств уменьшения (Гордон, 1971) метода Безье мы должны различать, что мы аппроксимируем (ломаную или другую кривую) и по каким вершинам действует выбранный метод (в терминах производных на концах или по интерактивным попыткам и ошибкам).

5. Кривая Безье в общем случае

Как показал Безье, его метод интерполяции не ограничивается полиномами. В общем случае:

$$Be_n(\vec{f};t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n}\right) J_{ni}(t), \tag{5.1}$$

где $J_{ni}(t)$ — интерполяционные функции, которые могут быть образованы линейными комбинациями $n+1$ линейно независимых функций переменной t. Интерполяционные функции $J_{n0}(t)$ и $J_{nn}(t)$ могут быть вычислены из условий

$$J_{n0}(0) = 1, \quad J_{n0}^{(p)}(1) = 0, \qquad 0 \leqslant p < n, \tag{5.2}$$

$$J_{nn}(1) = 1, \quad J_{nn}^{(q)}(0) = 0, \qquad 0 \leqslant q < n. \tag{5.3}$$

Оставшиеся интерполяционные функции могут быть выведены из

$$J_{ni}^{(p)}(0) = 0, \qquad 0 \leqslant p < i, \tag{5.4}$$

$$J_{ni}^{(q)}(1) = 0, \qquad 0 \leqslant q < n-i; \tag{5.5}$$

и либо

$$J_{ni}^{(i)}(0) = (-1)^i J_{n0}^{(i)}(0), \tag{5.6}$$

либо

$$J_{ni}^{(n-i)}(1) = (-1)^{n-i} J_{nn}^{(n-i)}(1). \tag{5.7}$$

Для независимости от осей

$$\sum_{i=0}^{n} J_{ni}(t) \equiv 1. \tag{5.8}$$

Например, для базисных функций

$$\left\{\cos^2\frac{\pi}{2}\,t,\ \sin^2\frac{\pi}{2}\,t,\ \cos\frac{\pi}{2}\,t,\ \sin\frac{\pi}{2}\,t\right\}$$

из (5.2) и (5.3) получим

$$J_{30}(t) = \cos^2 \frac{\pi}{2} t + 2\sin^2 \frac{\pi}{2} t - 2\sin \frac{\pi}{2} t,$$
$$J_{33}(t) = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} t + \sin^2 \frac{\pi}{2} t - 2\cos \frac{\pi}{2} t.$$

Следовательно,

$$J_{30}^{(1)}(0) = -\pi, \qquad J_{30}^{(2)}(0) = \frac{\pi^2}{2},$$
$$J_{33}^{(1)}(1) = \pi, \qquad J_{33}^{(2)}(1) = \frac{\pi^2}{2},$$

откуда

$$J_{31}(t) = -2\sin^2 \frac{\pi}{2} t + 2\sin \frac{\pi}{2} t,$$
$$J_{32}(t) = -2\cos^2 \frac{\pi}{2} t + 2\cos \frac{\pi}{2} t$$

с максимумом в $t = \frac{1}{3}$ для $J_{31}(t)$ и $t = \frac{2}{3}$ для $J_{32}(t)$. Отметим тот факт, что $\sum_{i=0}^{3} J_{3i}(t) \equiv 1$.

Несмотря на то, что случай неполиномиальных базисов исследован мало, различные расширения работы Безье доказали свою продуктивность. Использование рациональных кубических кривых для автоматизированной разработки было предложено автором и другими (Кунс, 1967; Форрест, 1968; Ли, 1969), и форма этих кривых получается изящной, когда кривые определяются при помощи ломаной из трёх отрезков. Замечательной особенностью такого способа, не присущей другим методам, является то, что коэффициенты, задающие форму кривой, не зависят от параметризации (то есть скорости обхода кривой при изменении параметра t).

6. Разбиение кривой и изменение количества отрезков ломаной

При интерактивной работе часто оказывается, что какой-либо участок кривой недостаточно мощен или гибок (то есть не имеет достаточного количества степеней свободы) для того, чтобы принимать требуемую форму. Решить эту проблему можно двумя способами: участок может быть разбит на два или более меньших участка, при неизменной форме кривой, или может быть использован более высокий порядок участка кривой при неизменной форме кривой. Разбиение кривой математически просто и может быть выгодно в случае, если требуется использовать кривые порядка не больше заданного. Увеличение порядка кривой при оставлении фигуры неизменной немного более сложно. Наиболее простым, видимо, является использование следующей формулы (Тэлбот, 1971) для увеличения порядка с n до $n+1$:

$$\vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n+1}\right) = \tfrac{1}{n+1}\left(i\vec{f}^*\left(\tfrac{i-1}{n}\right) + (n+1-i)\vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n}\right)\right), \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1. \tag{6.1}$$

Иногда требуется уменьшить порядок кривой с n до $n-1$ для упрощения. Это более хитрая операция, так как требуется исключение некоторых данных. Если n нечётно, то в действительности две вершины сливаются, но если n чётно, то средняя вершина исключается. В общем случае уменьшение порядка кривой влечёт изменение её формы, но операция разработана таким образом, что как минимум в случае полинома, заданного n-звенной ломаной, но на самом деле имеющего степень меньше n, при уменьшении количества отрезков ломаной с n до $n-1$ не изменится форма кривой.

Случаи чётного и нечётного n немного отличаются. В обоих случаях мы используем формулы

$$\vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n-1}\right) = \tfrac{1}{n-i}\left(n\vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n}\right) - i\vec{f}^*\left(\tfrac{i-1}{n-1}\right)\right) \tag{6.2}$$

и

$$\vec{f}^*\left(\tfrac{n-i-1}{n-1}\right) = \tfrac{1}{n-i}\left(n\vec{f}^*\left(\tfrac{n-i}{n}\right) - i\vec{f}^*\left(\tfrac{n-i}{n-1}\right)\right). \tag{6.3}$$

Для чётного n вычисляем $\vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n-1}\right)$ по формуле (6.2) для $0 \leqslant i \leqslant \frac{n-2}{2}$ и $\vec{f}^*\left(\tfrac{n-i-1}{n-1}\right)$ по формуле (6.3) для $0 \leqslant i \leqslant \frac{n-2}{2}$.

Если кривая задана ломаной из n отрезков, но имеет степень меньше n, то

$$\vec{f}^*\left(\frac{n/2}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{f}^*\left(\frac{(n-2)/2}{n-1}\right) + \vec{f}^*\left(\frac{n/2}{n-1}\right)\right). \tag{6.4}$$

Для нечётного n вычисляем $\vec{f}^*\left(\tfrac{i}{n-1}\right)$ по формуле (6.2) для $0 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $\vec{f}^*\left(\tfrac{n-i-1}{n-1}\right)$ по формуле (6.3) для $0 \leqslant i \leqslant \frac{n-3}{2}$. Полагаем $\vec{f}^*\left(\frac{(n-1)/2}{n-1}\right)$ равным среднему арифметическому значений, полученных по формулами (6.2) и (6.3). Если эти значения совпадают, то исходная кривая имела степень меньше n.

В вычислительной геометрии часто удобно использовать кусочные методы. Условия для непрерывности производных между двумя полиномами Безье могут быть получены из выражений для производных на концах. Непрерывность первой и второй производной можно без труда обеспечить графическими построениями, но непрерывность производных более высокого порядка требует более сложных построений.

Предположим, что

$$\vec{g}_I(t) = \sum_{i=0}^{m} \vec{f}_I^{\,*}\left(\tfrac{i}{m}\right) C_m^i t^i (1-t)^{m-i}$$

и

$$\vec{g}_{II}(t) = \sum_{j=0}^{n} \vec{f}_{II}^{\,*}\left(\tfrac{j}{n}\right) C_n^j t^j (1-t)^{n-j}$$

должны быть соединены так, чтобы

$$\vec{g}_I(1) = \vec{f}_I^{\,*}(1) = \vec{g}_{II}(0) = \vec{f}_{II}^{\,*}(0) = \vec{p}.$$

Положим

$$\vec{g}_I(1) - \vec{f}_I^{\,*}\left(\tfrac{m-1}{m}\right) = \vec{q} \tag{6.5}$$

и

$$\vec{f}_I^{\,*}\left(\tfrac{m-1}{m}\right) - \vec{f}_I^{\,*}\left(\tfrac{m-2}{m}\right) = \vec{r}. \tag{6.6}$$

Тогда для непрерывности первой производной в смысле Декарта требуется, чтобы

$$\vec{g}_I'(1) \equiv \lambda \vec{g}_{II}'(0), \tag{6.7}$$

где λ — положительная скалярная константа.

Для непрерывности второй производной в смысле Декарта требуется

$$\vec{g}_I''(1) \equiv \mu \vec{g}_{II}''(0), \tag{6.8}$$

и для непрерывности кривой требуется $\mu = \lambda^2$.

Вычисляя производные на концах для $\vec{g}_I$ и $\vec{g}_{II}$, мы можем показать, что для непрерывности первой производной требуется, чтобы

$$\vec{f}_{II}^{\,*}\left(\tfrac{1}{n}\right) = \vec{p} + \tfrac{\lambda m}{n}\,\vec{q}, \tag{6.9}$$

и, кроме того, для непрерывности кривизны требуется

$$\vec{f}_{II}^{\,*}\left(\tfrac{2}{n}\right) = \vec{p} + 2\tfrac{\lambda m}{n}\vec{q} + \lambda^2\,\tfrac{m(m-1)}{n(n-1)}\,(\vec{q} - \vec{r}). \tag{6.10}$$

В случае $m = n$, $\lambda = 1$,

$$\vec{f}_{II}^{\,*}\left(\tfrac{1}{n}\right) = \vec{p} + \vec{q}$$

и

$$\vec{f}_{II}^{\,*}\left(\tfrac{2}{n}\right) = \vec{p} + 3\vec{q} - \vec{r}.$$

Эти соотношения приводят к простым графическим построениям для обеспечения непрерывности производных первого и второго порядка. Соотношения для производных высших порядков могут быть получены, но, очевидно, это будет сложнее.

7. Интерактивная разработка и аппроксимация методами Безье

Может показаться, что поскольку все вершины ломаной могут быть выражены через производные на концах кривой, то данный метод существенно не отличается от интерполяции методом Тейлора или Эрмита. На самом деле, это не так по двум причинам, связанным с вычислительной геометрией. Во-первых, как замечено выше, при использовании метода Безье вершины ломаной могут не вычисляться через производные на концах, а выбираться вручную (в интерактивных системах); они будут, разумеется, контролировать производные на концах приближенной кривой. Во-вторых, для независимости от осей координат, удобства выделения участков, простоты аффинных преобразований и т. д. в вычислительной геометрии часто используются параметрически заданные кривые. Это вызывает сложности. В интерполяции методом Лагранжа значения параметра должны быть заданы для каждой точки интерполяции, что затруднительно даже для математически образованного пользователя. Форма интерполяционной кривой существенно зависит от выбранных значений параметра; автоматически методы обычно работают не удовлетворительно. В интерполяции по Тейлору или Эрмиту должны быть заданы производные по параметру. Пользователю может быть трудно понять различия между касательной и вектором производной, так же, как и роль длины вектора производной. Трудности возрастают с увеличением порядка производной. При использовании метода Безье ни одна из этих проблем не возникают. Пользователь не должен задавать значения параметра и производных (несмотря на то, что значения параметра для вершин ломаной равны $t = i/n$), поскольку расположение вершин ломаной непосредственно влияет на форму кривой способом, который может быть понят без труда. Немного попрактиковавшись, пользователь сможет предсказывать форму кривой, порождаемой той или иной ломаной.

Безье показал (в английском издании его книги, 1970) что годографы полиномиальных кривых Безье могут быть вычислены, используя отрезки ломаной для кривой.

Пусть дана кривая

$$\vec{g}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{f^*}\left(\tfrac{i}{n}\right) C_n^i t^i (1-t)^{n-i},$$

тогда если $\vec{h}(t)$ — полином Безье степени $n-1$ для ломаной, вершины которой

$$\left(\vec{f^*}\left(\tfrac{k+1}{n}\right) - \vec{f^*}\left(\tfrac{k}{n}\right)\right), \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

то $\vec{h}(t)$ — годограф $\vec{g}(t)$, то есть

$$\vec{h}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\vec{f}^{*}\left(\tfrac{k+1}{n}\right) - \vec{f}^{*}\left(\tfrac{k}{n}\right) \right) C_{n-1}^{k} t^{k} (1-t)^{n-1-k} = \tfrac{1}{n}\, \vec{g}'(t). \qquad (7.1)$$

(Доказательство очевидно и поэтому не приводится.)

Годограф предоставляет удобный *графический* метод нахождения точек с нулевой кривизной и точек перегиба. На практике годограф также подходит для определения того, что строящаяся кривая стремится к нежелательной форме (нежелательная прямая или точка перегиба).

8. Практический опыт использования методов Безье

Из решения Regie Renault увеличить количество управляемых компьютером чертёжных машин и цифровых инструментов очевидно, что методы Безье хорошо подходят для задач, которые встречаются в Renault.

В университете Кэмбриджа использовались четыре программы построения кривых Безье. Программа Пэнкхурста (1970) предназначена для задания одиночных участков кривой любого порядка; положение вершин ломаной меняется путём ввода команд. Порядок кривой может быть увеличен или уменьшен (как показано в разделе 6), и перемещение вершины возможно только вдоль отрезков ломаной, пересекающихся в этой вершине. Кривые Безье также были реализованы Армитом (1970) в его системе Multiobject. Кривая снова управляется вводом команд интерактивного языка, и предоставляются другие мощные возможности. Кроме того, реализовано разбиение кривой, и могут строится несколько участков кривой. Несмотря на то, что система создана для задания кривых, она также может использоваться для интерактивной аппроксимации данных. Тэлбот (1971) начал с построения непрерывных кубических сплайнов, при этом каждый сегмент получался с помощью метода наименьших квадратов. Последующие улучшения формы кривой с автоматическим обеспечением и сохранением непрерывности производной между сегментами достигались перемещением вершин ломаной.

Все картинки в этой статье были получены автором при помощи маленькой экспериментальной программы для компьютера PDP-7. Входом для программы были либо данные, описывающие аппроксимируемую кривую, либо кривая, нарисованная от руки при помощи светового пера. Программа вычисляет полиномы Безье от 2-го до 9-го порядка. В настоящее время может обрабатываться только один участок кривой. Программа разработана в первую очередь для интерактивной аппроксимации, и, в отличие от программ Пэнхруста, Армита и Тэлбота, всегда доступно визуальное сравнение требуемой кривой, нарисованной вручную или аналитически заданной, с её аппроксимацией. Для начальной аппроксимации вершины ломаной равномерно распределены по дуге кривой; таким образом, начальная аппроксимация является полиномом Бернштейна. Далее внутренние вершины ломаной могут быть перемещены световым пером, что вызовет соответствующее изменение кривой в реальном времени.

Есть несколько недостатков программы автора, которые должны бросаться в глаза. Аппроксимации производятся визуально, и отклонение меньше, чем 1 к 500 не обнаружить. Однако этот недостаток преодолевается использованием графопостроителей с более высоким разрешением. Кроме того, значительно более хорошей начальной аппроксимацией был бы векторный полином Лагранжа, проходящий через точки, равномерно расположенные на кривой, но это не может быть реализовано из-за ограниченных арифметических возможностей PDP-7. Требуется больше опыта построения кривых, составленных из нескольких кривых Безье, с автоматический поддержкой непрерывности. Существующая программа уже продемонстрировала, что успешные аппроксимации могут быть без труда выполнены несведущими в математике пользователями.

9. Распространение на поверхности

Методы Безье могут быть расширены для интерполяции и аппроксимации поверхностей. Это может быть достигнуто тремя основными способами. Метод, в действительности предложенный Безье и другими (Безье, 1968, 1970; Армит, 1970; Сэбин, 1969), — это метод произведения, в котором поверхность задаётся сеткой точек, только четыре из которых (угловые) лежат на поверхности. В полиномиальном случае

$$\vec{g}(t,u) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \vec{f}^{*}\left(\tfrac{i}{m}, \tfrac{j}{n}\right) C_m^i t^i (1-t)^{m-i}\, C_n^j u^j (1-u)^{n-j}. \tag{9.1}$$

Поверхность также может быть задана интерполяцией методом Безье семейства кривых

$$\left[\vec{f}^{*}\left(\tfrac{i}{m}, u\right) \text{ или } \vec{f}^{*}\left(t, \tfrac{j}{n}\right)\right]$$

способом, похожим на поднятие:

$$\vec{g}(t,u) = \sum_{i=0}^{m} \vec{f}^{*}\left(\tfrac{i}{m}, u\right) C_m^i t^i (1-t)^{m-i} \tag{9.2}$$

(в полиномиальном случае).

Поверхность также может быть задана способом, аналогичным способу Кунса (Кунс, 1967; Форрест, 1968) при помощи двух семейств кривых:

$$\begin{aligned}\vec{g}(t,u) = &\sum_{i=0}^{m} \vec{f^*}\left(\tfrac{i}{m}, u\right) C_m^i t^i (1-t)^{m-i} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n} \vec{f^*}\left(t, \tfrac{j}{n}\right) C_n^j u^j (1-u)^{n-j} - \\ &- \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \vec{f^*}\left(\tfrac{i}{m}, \tfrac{j}{n}\right) C_m^i t^i (1-t)^{m-i}\, C_n^j u^j (1-u)^{n-j}.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Из этих методов первый кажется наиболее подходящим для интерактивной разработки.

10. Заключение

Метод Безье — один из наиболее удобных методов для интерактивной аппроксимации кривых. Более того, этот метод естественным образом расширяется для задания поверхностей, и предоставляется простой способ контролирования параметров поверхности. Векторы кручения поверхности, которые являются камнем преткновения в интерактивном задании поверхностей (эти векторы существенны для дважды изогнутых поверхностей), легко определяются неявным образом.

Можно надеяться, что данная работа стимулирует дальнейшие исследования как в области описания формы, так и в области интерактивной аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Armit, A.P. Systems for Interactive Design of Three-dimensional Shapes. Cambridge University CAD Group Ph. D. Thesis, 1970.

2. Bezier, P. Emploi des Machines à Commande Numérique. Masson et Cie., Paris, 1970.

3. Bezier, P. Procédé de Définition Numerique des Courbes et Surfaces Non Mathématiques. Système UNISUFR, 1968.

4. Bezier, P. How Renault uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling. Society of Automative Engineers, 1968.

5. Coons, S. A. Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms. MIT MAC-TR-41, 1967.

6. Davis, P. J. Interpolation and Approxiamtion. Ginn-Blaisdell, New York, 1963.

7. Forrest, A. R. Computational Geometry. Proc. Roy. Soc. Lond., 1971.

8. Forrest, A. R. Coons' Surfaces and Multivariable Functional Interpolation. Cambridge University CAD Group, 1970.

9. Forrest, A. R. Curves and Surfaces for Computer-Aided Design. Cambridge University CAD Group Ph. D. Thesis, 1968.

10. Forrest, A. R. The Twisted Cubic Curve. Cambridge University CAD Group, 1970.

11. Gordon, W. J. Private communication, 1971.

12. Lee, T. N. P. Three-Dimensional Curves and Surfaces for Rapid Computer Display. Ph. D. Thesis, Harvard Unversity, 1969.

13. Minsky, M., Papert, S. Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry, MIT Press, Cambridge, Mass., 1969.

14. Pankhurst, R. J. Notes on Experiments with Command Languages for Graphic Interaction. Cambridge University CAD Group, 1970.

15. Sabin, M. A. A 16-Point Bicubic Formulation Suitable for Multipatch Surfaces. British Aircraft Corporation, Weybridge, 1969.

16. Talbot, J. E. Experiments towards interactive graphical design of motor bodies. Cambridge University CAD Group, 1971.