СОСТАВНЫЕ И ОБОБЩЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

15 марта 2008 г.

В докладе введено понятие обобщённой поверхности Кунса, частными случаями которой являются билинейные и бикубические поверхности Кунса [1, 2], а также поверхности Гордона [3]. Показано, что и составные поверхности Кунса [4] можно представить как частный случай обобщённых.

1°. Напомним определение параметрической поверхности Кунса. Воспользуемся следующими обозначениями из [2]:

L_1, L_2, L_3, L_4 — линейные операторы, определяемые для непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ формулами

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1); \tag{1}$$

H_1, H_2, H_3, H_4 — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{array}{llll} H_1(0) = 1, & H_1'(0) = 0, & H_1'(1) = 0, & H_1(1) = 0; \\ H_2(0) = 0, & H_2'(0) = 1, & H_2'(1) = 0, & H_2(1) = 0; \\ H_3(0) = 0, & H_3'(0) = 0, & H_3'(1) = 1, & H_3(1) = 0; \\ H_4(0) = 0, & H_4'(0) = 0, & H_4'(1) = 0, & H_4(1) = 1. \end{array} \tag{2}$$

В качестве H_i можно взять, например, кубические полиномы Эрмита

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, \\ H_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \\ H_3(x) &= x^3 - x^2, \\ H_4(x) &= -2x^3 + 3x^2. \end{aligned} \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В [2] доказано, что если вектор-функции $f_i, g_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $i \in 1:4$, удовлетворяют условиям

$$L_j(f_i) = L_i(g_j), \qquad i,j \in 1:4,$$

то для поверхности, задаваемой вектор-функцией

$$c(u,v) = \sum_{i=1}^{4} H_i(u)\, f_i(v) + \sum_{j=1}^{4} H_j(v)\, g_j(u) - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} H_i(u)\, H_j(v)\, L_i(g_j), \tag{4}$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} L_i\big(c(\,\cdot\,,v)\big) &= f_i(v), \qquad v \in [0,1], \quad i \in 1:4\,;\\ L_j\big(c(u,\,\cdot\,)\big) &= g_j(u), \qquad u \in [0,1], \quad j \in 1:4\,. \end{aligned}$$

2°. Вместо операторов вида (1) можно использовать и другие наборы операторов. Кроме того, наборы операторов для переменных u и v могут быть различными.

Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \ldots, L_m^u\colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \ldots, H_m^u \in T_u$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:m. \tag{5}$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v\colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v \in T_v$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in 1:n. \tag{6}$$

Пусть s — натуральное число. Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_u &= \big\{ g\colon D_u \to \mathbb{R}^s \;\big|\; g(u) = \big(g_1(u), \ldots, g_s(u)\big),\ g_k \in T_u \big\},\\ \overrightarrow{T}_v &= \big\{ f\colon D_v \to \mathbb{R}^s \;\big|\; f(v) = \big(f_1(v), \ldots, f_s(v)\big),\ f_k \in T_v \big\}. \end{aligned}$$

Введём линейные операторы

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L}_i^u(g) &= \big(L_i^u(g_1), \ldots, L_i^u(g_s)\big) \ \text{ для } \ g(u) = \big(g_1(u), \ldots, g_s(u)\big) \in \overrightarrow{T}_u,\ i \in 1:m;\\ \overrightarrow{L}_j^v(f) &= \big(L_j^v(f_1), \ldots, L_j^v(f_s)\big) \ \text{ для } \ f(u) = \big(f_1(u), \ldots, f_s(u)\big) \in \overrightarrow{T}_v,\ j \in 1:n. \end{aligned}$$

Из соотношений (5) и (6) следуют тождества

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L}_i^u(aH_j^u) &= a\,\delta_{ij}, \qquad a \in \mathbb{R}^s, \quad i,j \in 1:m; \\ \overrightarrow{L}_j^v(aH_i^v) &= a\,\delta_{ij}, \qquad a \in \mathbb{R}^s, \quad i,j \in 1:n. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$f_1,\ldots,f_m \in \overrightarrow{T}_v, \qquad g_1,\ldots,g_n \in \overrightarrow{T}_u,$$

удовлетворяющие условиям согласования

$$\overrightarrow{L}_i^u(g_j) = \overrightarrow{L}_j^v(f_i), \qquad i \in 1:m, \quad j \in 1:n. \tag{8}$$

Определим вектор-функцию $c\colon D_u \times D_v \to \mathbb{R}^s$:

$$c(u,v) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\,f_i(v) + \sum_{j=1}^n H_j^v(v)\,g_j(u) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\overrightarrow{L}_i^u(g_j). \tag{9}$$

Поверхность, определяемую вектор-функцией $c(u,v)$, назовём *обобщённой поверхностью Кунса.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Вектор-функция $c(u,v)$, задаваемая формулой* (9), *удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L}_i^u(c(\,\cdot\,,v)) &= f_i(v), \qquad i \in 1:m, \quad v \in D_v, \\ \overrightarrow{L}_j^v(c(u,\,\cdot\,)) &= g_j(u), \qquad j \in 1:n, \quad u \in D_u. \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. Согласно линейности операторов $\overrightarrow{L}_k^u$ и формулам (7) при $k \in 1:m$ имеем

$$\overrightarrow{L}_k^u\big(c(\,\cdot\,,v)\big) = \sum_{i=1}^m \overrightarrow{L}_k^u\big(f_i(v)\,H_i^u\big) + \sum_{j=1}^n H_j^v(v)\,\overrightarrow{L}_k^u(g_j) -$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overrightarrow{L}_k^u\big(\overrightarrow{L}_i^u(g_j)\,H_j^v(v)\,H_i^u\big) = \sum_{i=1}^m f_i(v)\,\delta_{ik} + \sum_{j=1}^n H_j^v(v)\,\overrightarrow{L}_k^u(g_j) -$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overrightarrow{L}_i^u(g_j)\,H_j^v(v)\,\delta_{ik} = f_k(v).$$

Аналогично с учётом (8) при $k \in 1:n$ получаем

$$\overrightarrow{L}_k^v\big(c(u,\,\cdot)\big) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\,\overrightarrow{L}_k^v(f_i) + \sum_{j=1}^n \overrightarrow{L}_k^v\big(g_j(u)\,H_j^v\big) -$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overrightarrow{L}_k^v\big(\overrightarrow{L}_j^v(f_i)\,H_i^u(u)\,H_j^v\big) = \sum_{i=1}^m H_i^u(u)\,\overrightarrow{L}_k^v(f_i) + \sum_{j=1}^n g_j(u)\,\delta_{jk} -$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overrightarrow{L}_j^v(f_i)\,H_i^u(u)\,\delta_{jk} = g_k(u).$$

Предложение доказано. □

3°. Рассмотрим некоторые частные случаи введённых обобщённых поверхностей Кунса.

В первых двух случаях пространства и функционалы для переменных u и v будут совпадать, то есть $D_v = D_u = D$, $T_v = T_u = T$, $n = m$, $L_i^v = L_i^u = L_i$, $H_i^v = H_i^u = H_i$. Во всех случаях $s = 3$.

1) $D = [0,1]$, $T = C(D)$, $m = 2$,

$$L_1(f) = f(0), \qquad L_2(f) = f(1),$$

$$H_1(x) = 1 - x, \qquad H_2(x) = x.$$

В данном случае при соблюдении условий (8) обобщённая поверхность Кунса совпадает с билинейной поверхностью Кунса (см. [1]).

2) $D = [0,1]$, $T = C^1(D)$, $m = 4$,

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1),$$

$$H_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \qquad H_2(x) = x^3 - 2x^2 + x,$$

$$H_3(x) = x^3 - x^2, \qquad H_4(x) = -2x^3 + 3x^2.$$

В этом случае при соблюдении условий (8) получаем бикубическую поверхность Кунса (см. [2]).

3) $D_u = [a,b]$, $D_v = [c,d]$; $a \leqslant u_1 < \cdots < u_m \leqslant b$, $c \leqslant v_1 < \cdots < v_n \leqslant d$;

$$T_u = C(D_u), \quad T_v = C(D_v); \qquad L_i^u(g) = g(u_i), \quad L_j^v(f) = f(v_j);$$

$$H_i^u(u) = \prod_{k \neq i} \frac{u - u_k}{u_i - u_k}, \quad i \in 1:m; \qquad H_j^v(v) = \prod_{k \neq j} \frac{v - v_k}{v_j - v_k}, \quad j \in 1:n.$$

В этом случае при соблюдении условий (8) обобщённая поверхность Кунса является поверхностью Гордона (см. [3, с. 410–412]).

4°. Перейдём к рассмотрению составных поверхностей Кунса.

Пусть заданы два набора кривых

$$a_i\colon [0,n] \to \mathbb{R}^3, \quad i \in 0:m, \qquad b_j\colon [0,m] \to \mathbb{R}^3, \quad j \in 0:n,$$

причём $a_i \in C^1\big([0,n]\big)$, $b_j \in C^1\big([0,m]\big)$, и выполняются условия

$$a_i(j) = b_j(i), \qquad i \in 0:m, \quad j \in 0:n.$$

Кроме того, пусть заданы векторы $d_{ij} \in \mathbb{R}^3$, $i \in 0:m$, $j \in 0:n$.

В [4] показано, как при помощи параметрических поверхностей Кунса построить составную поверхность Кунса, натянутую на кривые a_i и b_j. Для этого определяются наборы кривых $\{A_i\}_{i=0}^m$, $\{B_j\}_{j=0}^n$, исходя из условий

$$\begin{aligned} A_i(j) &= b_j'(i), \qquad & A_i'(j) &= d_{ij}, \\ B_j(i) &= a_i'(j), \qquad & B_j'(i) &= d_{ij}. \end{aligned}$$

Будем считать, что исходными данными являются наборы вектор-функций a_i, b_j, A_i, B_j, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} a_i(j) &= b_j(i), \qquad & A_i'(j) &= B_j'(i), \\ a_i'(j) &= B_j(i), \qquad & b_j'(i) &= A_i(j). \end{aligned} \tag{11}$$

Для фиксированных $i \in 0:m-1$, $j \in 0:n-1$ и $u, v \in [0,1]$ задаются граничные кривые

$$\begin{aligned} f_1(v) &= a_i(j+v), \qquad & f_2(v) &= A_i(j+v), \\ f_3(v) &= A_{i+1}(j+v), \qquad & f_4(v) &= a_{i+1}(j+v), \\ g_1(u) &= b_j(i+u), \qquad & g_2(u) &= B_j(i+u), \\ g_3(u) &= B_{j+1}(i+u), \qquad & g_4(u) &= b_{j+1}(i+u). \end{aligned} \tag{12}$$

Для этих кривых по формуле (4) строится параметрическая поверхность Кунса $c^{ij}(u,v)$. Составная поверхность Кунса задаётся формулой

$$s(\alpha,\beta) = c^{ij}(\alpha - i, \beta - j), \tag{13}$$

где $\alpha \in [i, i+1]$, $\beta \in [j, j+1]$, $i \in 0:m-1$, $j \in 0:n-1$. В [4] доказано, что для поверхности, определяемой вектор-функцией $s(\alpha,\beta)$, выполняются условия

$$\begin{gathered} s \in C^1, \qquad s_{\alpha\beta},\, s_{\beta\alpha} \in C; \\ s(i,\beta) = a_i(\beta), \quad s_\alpha(i,\beta) = A_i(\beta), \qquad i \in 0:m, \quad \beta \in [0,n]; \\ s(\alpha,j) = b_j(\alpha), \quad s_\beta(\alpha,j) = B_j(\alpha), \qquad j \in 0:n, \quad \alpha \in [0,m]. \end{gathered} \tag{14}$$

5°. Покажем, как для вектор-функций a_i, b_j, A_i, B_j, удовлетворяющих условиям (11), построить обобщённую поверхность Кунса, для которой будут выполнены условия (14).

Пусть $T_u = C^1[0,m]$, $T_v = C^1[0,n]$. Определим функционалы L_i^u, L_j^v и вектор-функции f_i, g_j таким образом, чтобы условия (10) соответствовали (14):

$$\begin{aligned}
&L_{2i}^u(g) = g(i), \quad L_{2i+1}^u(g) = g'(i), \quad f_{2i} = a_i, \quad f_{2i+1} = A_i, \quad \text{для } i \in 0:m;\\
&L_{2j}^v(f) = f(j), \quad L_{2j+1}^v(f) = f'(j), \quad g_{2j} = b_j, \quad g_{2j+1} = B_j, \quad \text{для } j \in 0:n.
\end{aligned} \tag{15}$$

Операторы $\overrightarrow{L}_i^u$ и $\overrightarrow{L}_j^v$ будут задаваться теми же формулами, что и функционалы L_i^u, L_j^v, но для вектор-функций:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{L}_{2i}^u(g) = g(i), \qquad \overrightarrow{L}_{2i+1}^u(g) = g'(i), \qquad \text{для } i \in 0:m;\\
&\overrightarrow{L}_{2j}^v(f) = f(j), \qquad \overrightarrow{L}_{2j+1}^v(f) = f'(j), \qquad \text{для } j \in 0:n.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что условия согласования (8) для заданных операторов и вектор-функций эквивалентны условиям (11):

$$\begin{aligned}
b_j(i) &= \overrightarrow{L}_{2i}^u(g_{2j}) = \overrightarrow{L}_{2j}^v(f_{2i}) = a_i(j),\\
B_j(i) &= \overrightarrow{L}_{2i}^u(g_{2j+1}) = \overrightarrow{L}_{2j+1}^v(f_{2i}) = a_i'(j),\\
b_j'(i) &= \overrightarrow{L}_{2i+1}^u(g_{2j}) = \overrightarrow{L}_{2j}^v(f_{2i+1}) = A_i(j),\\
B_j'(i) &= \overrightarrow{L}_{2i+1}^u(g_{2j+1}) = \overrightarrow{L}_{2j+1}^v(f_{2i+1}) = A_i'(j).
\end{aligned}$$

Осталось ввести смешивающие функции H_i^u, H_j^v, удовлетворяющие условиям (5) и (6). Равенства (5) для заданных операторов L_i^u примут вид

$$\begin{aligned}
H_{2i}^u(i) &= 1, & \big(H_{2i+1}^u\big)'(i) &= 1,\\
H_{2i}^u(j) &= 0, & \big(H_{2i+1}^u\big)'(j) &= 0, \quad \text{при } j \neq i,\\
\big(H_{2i}^u\big)'(j) &= 0, & H_{2i+1}^u(j) &= 0, \quad \text{при } j \in 0:m.
\end{aligned} \tag{16}$$

Положим

$$\begin{aligned}
H_{2i}^u(u) &= \begin{cases} H_1(u-i) & \text{при } u \in [i, i+1],\\ H_4(u-i+1) & \text{при } u \in [i-1, i),\\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}\\
H_{2i+1}^u(u) &= \begin{cases} H_2(u-i) & \text{при } u \in [i, i+1],\\ H_3(u-i+1) & \text{при } u \in [i-1, i),\\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}$$

где H_1, H_2, H_3 и H_4 — некоторые непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (2). Ясно, что $H_i^u \in C^1[0,m]$, и условия (16) выполнены. Графики функций H_{2i}^u и H_{2i+1}^u для случая, когда H_1, H_2, H_3 и H_4 являются полиномами Эрмита (3), изображены на рис. 1 и 2.

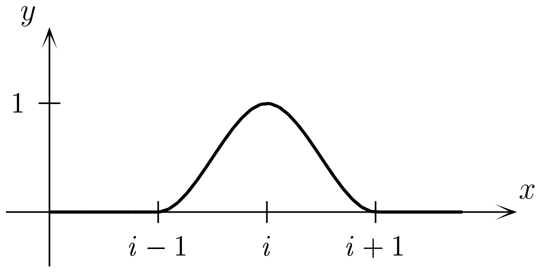

Рис. 1. Функция H_{2i}^u

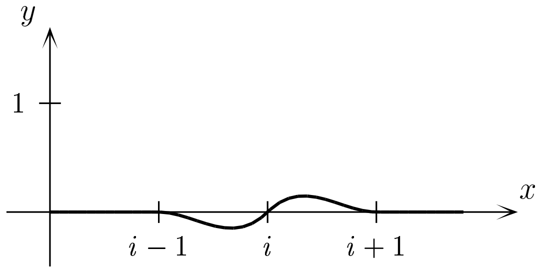

Рис. 2. Функция H_{2i+1}^u

Аналогичным образом определим функции H_j^v:

$$
\begin{aligned}
H_{2j}^v(v) &= \begin{cases} H_1(v-j) & \text{при } v \in [j, j+1], \\ H_4(v-j+1) & \text{при } v \in [j-1, j), \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \\
H_{2j+1}^v(v) &= \begin{cases} H_2(v-j) & \text{при } v \in [j, j+1], \\ H_3(v-j+1) & \text{при } v \in [j-1, j), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Итак, условия (5) и (6) на смешивающие функции, а также условия согласования (8) выполнены. Поэтому обобщённая поверхность Кунса $c(u,v)$, построенная по формуле (9), будет удовлетворять условиям (10). Если положить $s(\alpha,\beta) = c(\alpha,\beta)$, то формулы (10) примут вид (14). Таким образом, полученная обобщённая поверхность Кунса решает задачу построения поверхности, проходящей через заданные кривые и имеющей на них заданные производные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если для определения смешивающих функций H_i^u и H_j^v использовались те же функции H_1, H_2, H_3 и H_4, что и для построения составной поверхности Кунса $s(\alpha,\beta)$, то обобщённая и составная поверхности Кунса совпадают.*

Доказательство. Пусть $i \in 0 : m-1$, $j \in 0 : n-1$, $\alpha \in [i, i+1]$, $\beta \in [j, j+1]$. Положим $u = \alpha - i$, $v = \beta - j$. Тогда $s(\alpha,\beta) = c^{ij}(u,v)$.

Из определения H_k^u видно, что $H_k^u(\alpha)$ отлично от нуля только для $k = 2i$, $k = 2i+1$, $k = 2(i+1)$, $k = 2(i+1)+1$. При этом

$$H_{2i}^u(\alpha) = H_1(\alpha - i) = H_1(u), \qquad H_{2i+1}^u(\alpha) = H_2(\alpha - i) = H_2(u),$$
$$H_{2(i+1)}^u(\alpha) = H_4(\alpha - i) = H_4(u), \qquad H_{2(i+1)+1}^u(\alpha) = H_3(\alpha - i) = H_3(u).$$

Аналогично, $H_k^v(\beta)$ отлично от нуля только для $k = 2j$, $k = 2j+1$, $k = 2(j+1)$, $k = 2(j+1)+1$. При этом

$$H_{2j}^v(\beta) = H_1(v), \qquad H_{2j+1}^v(\beta) = H_2(v),$$
$$H_{2(j+1)}^v(\beta) = H_4(v), \qquad H_{2(j+1)+1}^v(\beta) = H_3(v).$$

Кроме того, из формул (15) следует, что

$$f_{2i}(\beta) = a_i(\beta) = a_i(j+v), \qquad f_{2i+1}(\beta) = A_i(\beta) = A_i(j+v),$$
$$f_{2(i+1)}(\beta) = a_{i+1}(\beta) = a_{i+1}(j+v), \qquad f_{2(i+1)+1}(\beta) = A_{i+1}(\beta) = A_{i+1}(j+v),$$
$$g_{2j}(\alpha) = b_j(\alpha) = b_j(i+u), \qquad g_{2j+1}(\alpha) = B_j(\alpha) = B_j(i+u),$$
$$g_{2(j+1)}(\alpha) = b_{j+1}(\alpha) = b_{j+1}(i+u), \qquad g_{2(j+1)+1}(\alpha) = B_{j+1}(\alpha) = B_{j+1}(i+u).$$

Таким образом, ненулевые слагаемые в $c(\alpha, \beta)$ из формулы (9) совпадают с соответствующими слагаемыми из формулы (4) для граничных вектор-функций (12). Следовательно, $c(\alpha, \beta) = c^{ij}(u, v) = s(\alpha, \beta)$, что и требовалось доказать. $\square$

На рис. 3 приведён пример кривых a_i, b_j при $m = n = 2$, а на рис. 4 показана составная поверхность Кунса для этих кривых.

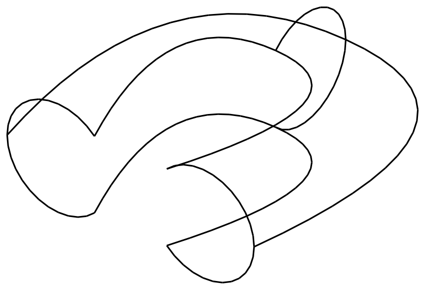

Рис. 3. Кривые a_i, b_j

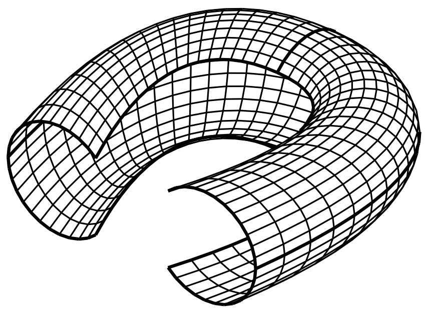

Рис. 4. Составная поверхность Кунса

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Билинейные поверхности Кунса и поверхности Безье* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 ноября 2006 г. (`http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1118`)

2. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Бикубические поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 23 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0123`)

3. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.

4. Чашников Н. В. *Составные параметрические поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 8 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0208`)