ОБЩИЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ДПФ*

В. Н. Малозёмов О. В. Просеков
malv@math.spbu.ru sc2@pisem.net

12 сентября 2006 г.

В докладе представлен усовершенствованный вариант общего подхода к вычислению ДПФ, предложенного М. Б. Свердликом [1].

1°. Пусть s и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — произвольные натуральные числа, отличные от единицы, и $N = n_1 n_2 \cdots n_s$. *Предположим, что при всех* $\nu \in 1 : s$ *найдутся числа* p_ν, q_ν *из* $1 : N-1$, *взаимно простые с* n_ν, *и натуральные* D_ν, G_ν *такие, что любые* $k, j \in 0 : N-1$ *допускают представления*

$$\begin{aligned} j &= \Big\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu D_\nu \Big\rangle_N, \qquad && j_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,, \\ k &= \Big\langle \sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu G_\mu \Big\rangle_N, \qquad && k_\mu \in 0 : n_\mu - 1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку множества коэффициентов $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ и $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ имеют ту же мощность, что и множество $0 : N-1$, то разложения (1) единственны.

Отметим (рис. 1), что

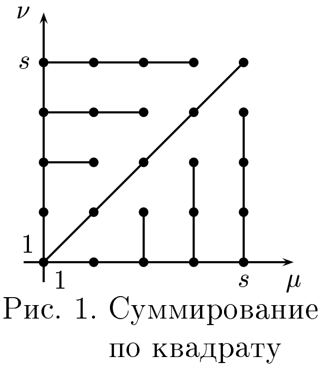

Рис. 1. Суммирование по квадрату

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu G_\mu\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu D_\nu\Big) = \sum_{\nu=1}^{s} k_\nu j_\nu\, q_\nu p_\nu G_\nu D_\nu +$$
$$+ \sum_{\mu=2}^{s}\sum_{\nu=1}^{\mu-1} k_\mu j_\nu\, q_\mu p_\nu G_\mu D_\nu + \sum_{\nu=2}^{s}\sum_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu j_\nu\, q_\mu p_\nu G_\mu D_\nu =$$
$$= A + L + H\,.$$

Поэтому

$$\omega_N^{kj} = \omega_N^{A}\, \omega_N^{L}\, \omega_N^{H}\,. \tag{2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Сокращение количества арифметических операций при вычислении ДПФ возможно в трёх случаях:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{C1}) \qquad \langle L\rangle_N = \langle H\rangle_N = 0\,,\\
&(\mathrm{C2}) \qquad \langle L\rangle_N = 0\,,\\
&(\mathrm{C3}) \qquad \langle H\rangle_N = 0\,.
\end{aligned}$$

2°. Условие (C1) выполняется, когда

$$\langle G_\mu D_\nu\rangle_N = 0 \qquad \text{при } \mu \neq \nu. \tag{3}$$

Обозначим $B_\nu = N/n_\nu$. Самый простой способ обеспечить (3) — положить $G_\mu = B_\mu$, $D_\nu = B_\nu$. В этом случае $G_\mu D_\nu = N\big(N/(n_\nu n_\mu)\big)$. Формула (2) принимает вид

$$\omega_N^{kj} = \omega_N^A = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_N^{k_\nu j_\nu q_\nu p_\nu B_\nu^2} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu \langle q_\nu p_\nu B_\nu\rangle_{n_\nu}}\,.$$

Если $\langle q_\nu p_\nu B_\nu\rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1:s$, то получаем дальнейшее упрощение

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}\,. \tag{4}$$

Перепишем формулы (1) при выбранных G_μ, D_ν:

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu B_\nu \right\rangle_N, \qquad j_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,, \tag{5}$$

$$k = \left\langle \sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu B_\mu \right\rangle_N, \qquad k_\mu \in 0 : n_\mu - 1\,. \tag{6}$$

Взаимно однозначное соответствие между элементами множества $0 : N-1$ и наборами коэффициентов $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ и $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ можно гарантировать лишь тогда, когда числа $n_1, n_2, \ldots, n_s$ попарно взаимно просты. Действительно, пусть, например, наряду с (5) имеется разложение

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j'_\nu\, p_\nu B_\nu \right\rangle_N, \qquad j'_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,. \tag{7}$$

Покажем, что при сделанном предположении $j'_\nu = j_\nu$ при всех $\nu \in 1 : s$. Согласно (5) и (7)

$$\sum_{\nu=1}^{s} (j'_\nu - j_\nu)\, p_\nu B_\nu = t\,N\,.$$

Взяв вычеты по модулю n_μ, получим $\big\langle (j'_\mu - j_\mu)\, p_\mu B_\mu \big\rangle_{n_\mu} = 0$. Поскольку произведение $p_\mu B_\mu$ взаимно просто с n_μ, то $(j'_\mu - j_\mu)$ делиться на n_μ. К равенству $j'_\mu = j_\mu$ мы приходим на том основании, что $|j'_\mu - j_\mu| \leqslant n_\mu - 1$.

Формулы (5), (6) и (4) порождают параметрический вариант метода простых множителей для вычисления ДПФ [2].

3°. Условие (C2) выполняется, когда

$$\langle G_\mu D_\nu \rangle_N = 0 \qquad \text{при } \mu \in 2:s,\ \nu \in 1:\mu-1. \tag{8}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = 1\,; \quad \Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} \quad \text{при } \nu \in 2:s+1, \\ &N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s \quad \text{при } \nu \in 0:s-1, \quad N_s = 1\,. \end{aligned}$$

Для обеспечения (8) положим

$$G_\mu = \Delta_\mu\,, \qquad D_\nu = N_\nu\,. \tag{9}$$

В этом случае $G_\mu D_\nu = n_1 \cdots n_{\mu-1} n_{\nu+1} \cdots n_s = N(n_{\nu+1} \cdots n_{\mu-1})$. В частности, $G_\mu D_{\mu-1} = N$.

Согласно (9), $G_\nu D_\nu = N/n_\nu$, так что

$$\omega_N^A = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu\, q_\nu p_\nu}\,.$$

Если $\langle p_\nu q_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1:s$, то приходим к дальнейшему упрощению

$$\omega_N^A = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}\,. \tag{10}$$

Условие (C2) гарантирует равенство $\omega_N^L = 1$. В то же время

$$\omega_N^H = \prod_{\nu=2}^{s} \omega_N^{j_\nu\, p_\nu N_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu\, q_\mu \Delta_\mu}\,. \tag{11}$$

Обозначим

$$u_1 = 0\,, \quad u_\nu = j_\nu\, p_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu\, q_\mu \Delta_\mu \qquad \text{при } \nu = 2:s.$$

Объединив (2), (10) и (11), получим формулу

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}\, \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{u_\nu}\,. \tag{12}$$

Перепишем (1) при $D_\nu = N_\nu$ и $G_\mu = \Delta_\mu$:

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu N_\nu \right\rangle_N, \qquad j_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,, \tag{13}$$

$$k = \left\langle \sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu \Delta_\mu \right\rangle_N, \qquad k_\mu \in 0 : n_\mu - 1\,. \tag{14}$$

Покажем, что любые $j, k \in 0 : N - 1$ допускают такое представление.

Если наряду с (14) справедливо равенство

$$k = \left\langle \sum_{\mu=1}^{s} k'_\mu\, q_\mu \Delta_\mu \right\rangle_N, \qquad k'_\mu \in 0 : n_\mu - 1\,,$$

то

$$(k'_1 - k_1)\, q_1 + \sum_{\mu=2}^{s} (k'_\mu - k_\mu)\, q_\mu \Delta_\mu = t\, N\,.$$

Взяв вычеты по модулю n_1, запишем $\langle (k'_1 - k_1)\, q_1 \rangle_{n_1} = 0$. Отсюда и из взаимной простоты q_1 и n_1 следует, что $k'_1 = k_1$. Пусть $k'_\mu = k_\mu$ при $\mu \in 1 : \alpha - 1$. Тогда

$$(k'_\alpha - k_\alpha)\, q_\alpha \Delta_\alpha + \sum_{\mu=\alpha+1}^{s} (k'_\mu - k_\mu)\, q_\mu \Delta_\mu = t\, N\,.$$

Поделим эти равенства на Δ_α, а затем возьмём вычеты по модулю n_α. Получим $\big\langle (k'_\alpha - k_\alpha)\, q_\alpha \big\rangle_{n_\alpha} = 0$. По той же причине, что и раньше, $k'_\alpha = k_\alpha$.

Аналогично, допустив, что наряду с (13) справедливо равенство

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j'_\nu\, p_\nu N_\nu \right\rangle_N, \qquad j'_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,,$$

последовательно установим, что $j'_s = j_s$, $j'_{s-1} = j_{s-1}$, $\ldots$, $j'_1 = j_1$.

Формулы (13), (14) и (12) порождают параметрический вариант быстрого преобразования Фурье с прореживание по времени [1].

4°. Последнее условие (С3) выполняется, когда

$$\langle G_\mu D_\nu \rangle_N = 0 \qquad \text{при } \nu \in 2:s,\ \mu \in 1:\nu-1.$$

Это обеспечивается следующим выбором

$$D_\nu = \Delta_\nu\,, \qquad G_\mu = N_\mu\,,$$

поскольку $D_\nu G_\mu = n_1 \cdots n_{\nu-1} n_{\mu+1} \cdots n_s = N(n_{\mu+1} \cdots n_{\nu-1})$. В частности, $D_\nu G_{\nu-1} = N$.

Условие (С3) гарантирует равенство $\omega_N^H = 1$. В то же время

$$\omega_N^L = \prod_{\mu=2}^{s} \omega_N^{k_\mu\, q_\mu N_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu-1} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu}\,.$$

Обозначим

$$v_1 = 0\,, \quad v_\mu = k_\mu\, q_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu-1} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu \qquad \text{при } \mu = 2:s.$$

Если потребовать дополнительно, чтобы $\langle p_\nu q_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1:s$, то так же, как в предыдущем пункте, получим

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\mu=1}^{s} \omega_{n_\mu}^{k_\mu j_\mu}\, \omega_{\Delta_{\mu+1}}^{v_\mu}\,. \tag{15}$$

Перепишем (1) при $D_\nu = \Delta_\nu$ и $G_\mu = N_\mu$:

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu \right\rangle_N, \qquad j_\nu \in 0:n_\nu - 1\,, \tag{16}$$

$$k = \left\langle \sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu N_\mu \right\rangle_N, \qquad k_\mu \in 0:n_\mu - 1\,. \tag{17}$$

Формулы (16), (17) и (15) порождают параметрический вариант быстрого преобразования Фурье с прореживание по частоте [1].

5°. Рассмотрим обобщённую реверсную перестановку π множества $0:N-1$, сопоставляющую числу $l = \sum_{\nu=1}^{s} l_\nu\, \Delta_\nu$, где $l_\nu \in 0:n_\nu - 1$, число

$$k = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} l_\nu\, p_\nu N_\nu \right\rangle_N.$$

Здесь, как и раньше, p_ν принадлежит $1:N-1$ и взаимно просто с n_ν. Найдём обратную перестановку π^{-1}.

Имеем
$$\sum_{\nu=1}^{s-1} l_\nu\, p_\nu N_\nu + l_s\, p_s = t\,N + k\,.$$
Взяв вычеты по модулю n_s, получим $\langle l_s\, p_s\rangle_{n_s} = \langle k\rangle_{n_s}$. Пусть q_ν принадлежат $1:n_\nu-1$ и удовлетворяют условию $\langle q_\nu\, p_\nu\rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1:s$. Тогда, в частности, $l_s = \langle k\, q_s\rangle_{n_s}$.

Предположим, что уже вычислены $l_s, l_{s-1}, \ldots, l_{\alpha+1}$. Обозначим
$$r_\alpha = k - \sum_{\nu=\alpha+1}^{s} l_\nu\, p_\nu N_\nu \tag{18}$$
и запишем
$$\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} l_\nu\, p_\nu N_\nu + l_\alpha\, p_\alpha N_\alpha = t\,N + r_\alpha\,.$$
Поделим это равенство на N_α, после чего возьмём вычеты по модулю n_α. Придём к формуле
$$\langle l_\alpha\, p_\alpha\rangle_{n_\alpha} = \langle r_\alpha / N_\alpha\rangle_{n_\alpha}\,.$$
Отсюда следует, что
$$l_\alpha = \big\langle (q_\alpha\, r_\alpha)/N_\alpha\big\rangle_{n_\alpha}\,, \qquad \alpha = s-1, s-2, \ldots, 1\,. \tag{19}$$
Если учесть, что $r_s = k$ и $N_s = 1$, то (19) справедливо и при $\alpha = s$.

Таким образом,
$$\pi^{-1}(k) = \sum_{\nu=1}^{s} l_\nu\, \Delta_\nu\,,$$
где l_ν последовательно вычисляется по формуле (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Свердлик М. Б. *Матричная интерпретация и вычислительная эффективность алгоритмов БПФ* // Радиотехника и электроника. 1984. № 2. С. 265–274.

2. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрический вариант метода простых множителей* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 5 сентября 2006 г.