# СТРОГАЯ $h$-ОТДЕЛИМОСТЬ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ*

Е. К. Чернэуцану

katerinache@yandex.ru

29 января 2011 г.

**1°**. Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

В работах [1, 2] рассматривалась задача о строгой отделимости множеств $A$ и $B$ с помощью $h$ гиперплоскостей в случае, когда $\operatorname{conv}(A) \cap B = \varnothing$. Было установлено, что эта задача сводится к экстремальной задаче

$$F(G) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \psi_j(G) \to \inf, \tag{1}$$

где

$$\varphi_i(G) = \max_{s\in 1:h}\bigl[\langle w^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\bigr]_+,$$
$$\psi_j(G) = \min_{s\in 1:h}\bigl[-\langle w^s, b_j\rangle + \gamma_s + 1\bigr]_+.$$

Неизвестной является $\bigl(h \times (n+1)\bigr)$-матрица $G$ со строками $(w^s,\, \gamma_s)$, $s \in 1:h$.

Очевидно, что $F(G) \geqslant 0$ для всех $G$. Условие $F(G_*) = 0$ характеризует ситуацию строгого $h$-отделения.

В данном докладе мы покажем, что задача (1) *эквивалентна* конечному числу задач линейного программирования.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

**2°**. Обозначим $\Pi = \big\{S = (s_1, \dots, s_k) \mid s_j \in 1:h,\ j \in 1:k\big\}$.

**ЛЕММА.** *Справедливо равенство*

$$\inf_G F(G) = \min_{S\in\Pi} \inf_G \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+ \Big\}. \tag{2}$$

Доказательство. Предварительно установим соотношение

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j(G) = \min_{S\in\Pi} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+. \tag{3}$$

Пусть $\psi_j(G) = \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+$ при $j \in 1:k$. Обозначим $S = (s_1, \dots, s_k)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j(G) = \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+ \geqslant \min_{S\in\Pi} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+. \tag{4}$$

С другой стороны, при $S \in \Pi$ имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+ \geqslant \sum_{j=1}^{k} \min_{s\in 1:h} \big[-\langle w^{s}, b_j\rangle + \gamma_{s} + 1\big]_+ = \sum_{j=1}^{k} \psi_j(G). \tag{5}$$

Взяв в левой части неравенства (5) минимум по $S \in \Pi$, придём к неравенству, противоположному (4). Равенство (3) установлено.

Из (3) следует, что

$$F(G) = \min_{S\in\Pi} \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+ \Big\}$$

и

$$\inf_G F(G) = \inf_G \min_{S\in\Pi} \Big\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+ \Big\}. \tag{6}$$

Осталось в правой части (6) поменять местами инфимум по $G$ и минимум по $S \in \Pi$. Лемма доказана. $\square$

**3°**. Лемма показывает, что задача (1) эквивалентна конечному числу экстремальных задач вида

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\max_{s\in 1:h}\big[\langle w^s, a_i\rangle - \gamma_s + 1\big]_+ + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\big[-\langle w^{s_j}, b_j\rangle + \gamma_{s_j} + 1\big]_+ \to \inf_G, \tag{7}$$

соответствующих различным $S \in \Pi$. В свою очередь, задача (7) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_i + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} q_j \to \inf, \\ -\langle a_i, w^s\rangle + \gamma_s + p_i \geqslant 1, \quad i \in 1:m,\ s \in 1:h; \\ \langle b_j, w^{s_j}\rangle - \gamma_{s_j} + q_j \geqslant 1, \quad j \in 1:k; \\ p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:m; \quad q_j \geqslant 0, \quad j \in 1:k.\end{gathered} \tag{8}$$

Приходим к следующему заключению.

**ТЕОРЕМА.** *Задача* (1) *эквивалентна конечному числу задач линейного программирования вида* (8) *в том смысле, что решение задачи* (8) *при* $S \in \Pi$, *которому соответствует наименьшее значение целевой функции, является решением задачи* (1).

**4°**. Рассмотрим пример. Пусть на плоскости заданы множества $A$ и $B$, состоящие соответсвенно из точек

$$a_1 = (-2, 0),\ a_2 = (2, 0),\ a_3 = (0, 2),\ a_4 = (0, 1);$$
$$b_1 = (0, 3),\ b_2 = (3, 0),\ b_3 = (-3, 0).$$

Очевидно, что $\operatorname{conv}(A) \cap B = \varnothing$ (см. рис. 1).

Решим задачу строгой 2-отделимости. В данном случае

$$n = 2,\ m = 4,\ k = 3,\ h = 2.$$

Выясним, как выглядит задача (8) при $S = (1, 1, 2)$. Выпишем вектор неизвестных

$$z = (w_1^1,\ w_2^1,\ \gamma_1,\ w_1^2,\ w_2^2,\ \gamma_2,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ q_1,\ q_2,\ q_3)$$

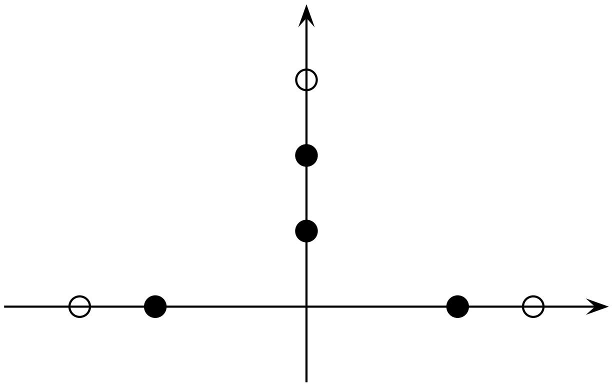

Рис. 1

и матрицу ограничений

$$D = \left[\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & 0 & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
-2 & 0 & 1 & & & & & 1 & & & & & \\
0 & -2 & 1 & & & & & & 1 & & & & \\
0 & -1 & 1 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & 2 & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & -2 & 0 & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & -2 & 1 & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & -1 & 1 & & & & 1 & & & \\
0 & 3 & -1 & & & & & & & & 1 & & \\
3 & 0 & -1 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & -3 & 0 & -1 & & & & & & & 1
\end{array}\right].$$

Задача (8) примет вид

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_j \to \inf, \tag{9}$$

$$Dz \geqslant e,$$

$$p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:4; \qquad q_j \geqslant 0, \quad j \in 1:3.$$

Решением данной задачи является вектор

$$z = (111.2210,\ 112.0012,\ 272.9097,\ -78.1474,\ 27.3511,\ 192.1601,$$
$$0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000).$$

Минимальное значение целевой функции равно нулю. Строгое 2-отделение множеств $A$ и $B$ при $S = (1,\ 1,\ 2)$ выглядит так, как показано на рис. 2.

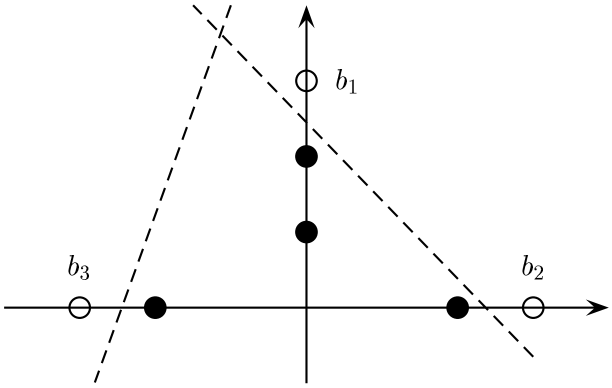


Рис. 2

Отметим, что задание вектора индексов $S = (1,\, 1,\, 2)$ соответствует разбиению множества $B$ на два подмножества $\{b_1,\, b_2\} \cup \{b_3\}$. Эти два подмножества согласованно отделяются от множества $A$ с помощью двух прямых

$$\langle w^1, x\rangle = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \langle w^2, x\rangle = \gamma_2.$$

Существуют ещё два разбиения множества $B$ на два подмножества:

$$\{b_1,\, b_3\} \cup \{b_2\} \quad \text{и} \quad \{b_2,\, b_3\} \cup \{b_1\}.$$

Им соответствуют векторы $S = (1,\, 2,\, 1)$ и $S = (2,\, 1,\, 1)$.

Результат строгого 2-отделения при $S = (1,\, 2,\, 1)$ показан на рис. 3.

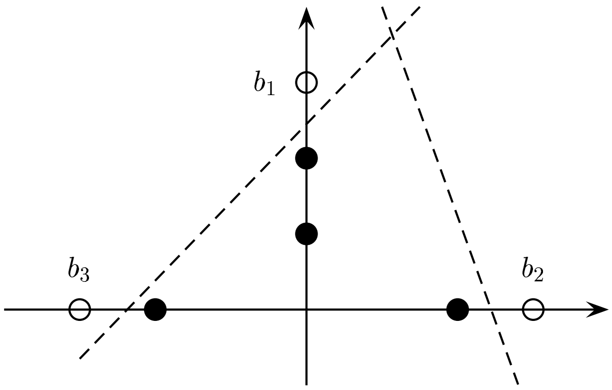


Рис. 3

Этот случай симметричен случаю $S = (1,\, 1,\, 2)$.

При $S = (2,\ 1,\ 1)$ строгой 2-отделимости нет (см. рис. 4).

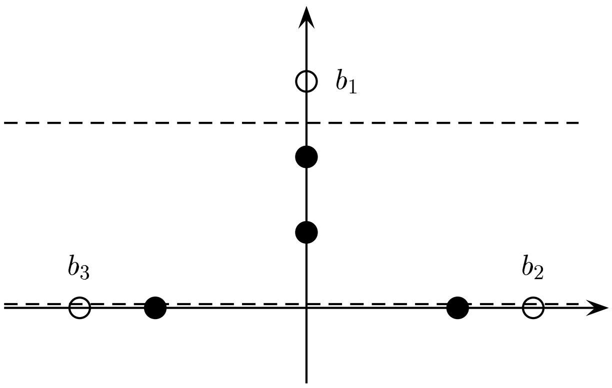


Рис. 4

Решением задачи, аналогичной (9), является вектор

$$z = (0.0000,\ -112.0230,\ -1.0000,\ 0.0000,\ 111.8673,\ 273.7824,$$
$$2.0000,\ 2.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.0000).$$

Минимальное значение целевой функции равно единице.

**5°**. В общем случае задание вектора $S \in \Pi$ соответствует разбиению множества $B$, состоящего из $k$ векторов, на $h$ подмножеств. Число таких разбиений и определяет количество задач линейного программирования вида (8), к решению которых сводится решение задачи (1).

Если заранее известно, что множества $A$ и $B$ строго $h$-отделимы, то решение задачи (1) можно упростить. После разбиения множества $B$ на $h$ подмножеств следует *независимо* решать задачи линейного отделения каждого из этих подмножеств от множества $A$. В случае успешного отделения совокупность разделяющих гиперплоскостей образует решение задачи (1).

В рассмотренном выше примере при $S = (1,\ 1,\ 2)$ будем независимо решать задачи линейного отделения множеств $\{b_1,\ b_2\}$ и $\{b_3\}$ от $A$. Запишем соответствующие задачи линейного программирования (см. [3])

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} q_j \to \inf,$$
$$-\langle a_i, w^1\rangle + \gamma_1 + p_i \geqslant 1, \quad i \in 1:4;$$
$$\langle b_j, w^1\rangle - \gamma_1 + q_j \geqslant 1, \quad j \in 1:2;$$
$$p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:4; \qquad q_j \geqslant 0, \quad j \in 1:2,$$

и

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p_i + q_3 \to \inf,\\
&-\langle a_i, w^2\rangle + \gamma_2 + p_i \geqslant 1, \quad i \in 1:4;\\
&\langle b_3, w^2\rangle - \gamma_2 + q_3 \geqslant 1;\\
&p_i \geqslant 0, \quad i \in 1:4; \qquad q_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Их решения $\{w^1, \gamma_1\}$ и $\{w^2, \gamma_2\}$ определяют две прямые, строго отделяющие $A$ от $B$ (см. рис. 5).

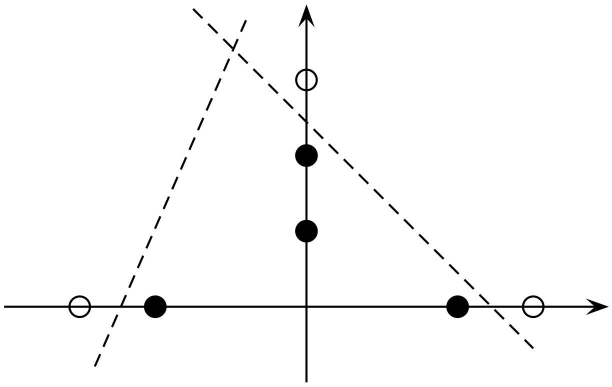

Рис. 5

## ЛИТЕРАТУРА


1. Astorino A., Gaudioso M. *Polyhedral separability througt successive LP* // JOTA. 2002. Vol. 112. No. 2. P. 265–293.

2. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. *Строгая h-отделимость двух множеств* // Семинар «DHA & CAGD». 18 декабря 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1218`)

3. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. *О математической диагностике (линейная модель)* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 17 апреля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0417`)