ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ГЕГЕНБАУЭРА*

Н. О. Котелина
nad7175@yandex.ru

13 ноября 2010 г.

Выводится формула сложения для полиномов Гегенбауэра из формулы Грина для гармонических функций.

1. Обозначения и предварительные сведения.

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ и σ_n — её площадь. Пусть далее

$$B^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < 1\big\}$$

— единичный открытый шар в $\mathbb{R}^n$. В докладе будем рассматривать однородные гармонические полиномы степени k. Они удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Сужение однородного гармонического полинома степени k на сферу называется сферической функцией порядка k.

Обозначим $\mathrm{Harm}(k)$ линейное пространство сферических функций порядка k. Пусть $N(k)$ — размерность $\mathrm{Harm}(k)$. В [3] показано, что

$$N(k) = C^k_{n+k-1} - C^{k-2}_{n+k-3}\,.$$

В пространстве $L_2(S^{n-1})$ введём скалярное произведение

$$\big(f, g\big) \;=\; \int_{S^{n-1}} f(\xi)\, g(\xi)\, dS.$$

Тогда в $\mathrm{Harm}(k)$ можно выбрать ортонормированный базис

$$\big\{Y_{ks}(\xi) \mid s = 1, 2, \ldots, N(k)\big\},$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

такой, что $(Y_{ks}, Y_{kl}) = \delta_{sl}$. Как известно [4], система $\bigl\{\{Y_{ks}\}_{s=1}^{N(k)}\bigr\}_{k=0}^{\infty}$ является полной системой в пространстве $L_2(S^{n-1})$, так что любая функция $f \in L_2(S^{n-1})$ разлагается в ряд Фурье по этой системе:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{N(k)} f_{ks}\, Y_{ks}\,, \quad f_{ks} = \bigl(f, Y_{ks}\bigr). \tag{1}$$

Данный ряд сходится по норме пространства $L_2(S^{n-1})$ [4].

2. Полиномы Гегенбауэра.

Рассмотрим ультрасферические полиномы Якоби $\{P_k^{(\alpha,\alpha)}\}_{k=0}^{\infty}$. Они являются ортогональными с весом $(1-x^2)^{\alpha}$ на $[-1,1]$. Обозначим (см. [2])

$$P_k^{(\lambda)}(x) = M_k\, P_k^{(\alpha,\alpha)}(x), \quad \lambda = \alpha + \frac{1}{2}\,,$$

где константа M_k выбирается так, чтобы была справедлива формула

$$\frac{1}{(1-2xr+r^2)^{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\lambda)}(x)\, r^k. \tag{2}$$

Ряд (2) сходится при выполнении неравенства $2|xr| + r^2 < 1$. Мы ограничимся случаем, когда $x \in [-1,1]$. Тогда условие сходимости гарантированно выполнено при $2|r| + r^2 < 1$, что равносильно неравенству $\bigl(1+|r|\bigr)^2 < 2$ или

$$|r| < \sqrt{2} - 1. \tag{3}$$

Функция в левой части (2) является производящей функцией системы полиномов $\{P_k^{(\lambda)}(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

В дальнейшем будем рассматривать полиномы Гегенбауэра $\{G_k^{(n)}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ вида

$$G_k^{(n)}(x) = C_k^{(n)} P_k^{(\lambda)}(x),$$

где $\lambda = \frac{n-3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n-2}{2}$, а константа $C_k^{(n)}$ выбирается из условия $G_k^{(n)}(1) = 1$. Вместо $G_k^{(n)}(x)$ будем писать просто $G_k(x)$. Основной целью доклада является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного ортонормированного базиса* $\{Y_{ks}\}_{s=1}^{N(k)} \subset \mathrm{Harm}(k)$ *справедлива формула сложения для полиномов Гегенбауэра:*

$$G_k\bigl(\langle \xi, \eta \rangle\bigr) = \frac{\sigma_n}{N(k)} \sum_{s=1}^{N(k)} Y_{ks}(\xi)\, Y_{ks}(\eta), \qquad \xi,\ \eta \in S^{n-1}. \tag{4}$$

Для доказательства формулы (4) зафиксируем ξ и найдём коэффициенты Фурье функции $f(\eta) = G_k\bigl(\langle\xi,\eta\rangle\bigr)$ в разложении в ряд по системе $\bigl\{\{Y_{ms}(\eta)\}_{s=1}^{N(m)}\bigr\}_{m=1}^{\infty}$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых целых k, $m \geqslant 0$ и $s = 1,\ldots,N(m)$ справедлива формула*

$$\Bigl(G_k\bigl(\langle\xi,\cdot\rangle\bigr), Y_{ms}\Bigr) = \frac{\sigma_n}{N(m)}\, Y_{ms}(\xi)\,\delta_{km}\,.$$

Из теоремы 2 будет следовать теорема 1.

3. Формула Грина для гармонических функций.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится формула Грина для гармонических функций. Пусть функция $u(x)$ является гармонической в шаре B^n и принадлежит классу $C^1(\overline{B^n})$, где $\overline{B^n} = B^n \cup S^{n-1}$. Для $x \in B^n$ справедлива формула Грина (см. [1]):

$$u(x) \;=\; \gamma_n \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\,\frac{\partial u(\eta)}{\partial\nu} - u(\eta)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\Bigl(\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\Bigr)\,dS_\eta\,. \tag{5}$$

Здесь $\gamma_n = \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}$ и ν — вектор нормали к S^{n-1} в точке η.

Перейдём к доказательству теоремы 2.

4. Доказательство теоремы 2.

Доказательство. Для произвольных $m \geqslant 0$, $s = 1,\ldots,N(m)$ функция $Y_{ms}(\eta)$ является сужением на сферу гармонического полинома $Y_{ms}(x)$ степени m. Запишем для него формулу Грина (5). Возьмём произвольную точку $\xi \in S^{n-1}$ и число $r \in [0,\sqrt{2}-1)$. Положим $x = r\xi$. Тогда $x \in B^n$. Пусть $\eta \in S^{n-1}$. Имеем

$$\|x-\eta\|^2 = \|r\xi-\eta\|^2 = r^2 - 2r\langle\xi,\eta\rangle + 1.$$

Возьмём $\lambda = \frac{n-2}{2}$, так что $n-2 = 2\lambda$. Пользуясь разложением (2), получаем тождество

$$\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}} = \frac{1}{\|x-\eta\|^{2\lambda}} = \frac{1}{\bigl(r^2-2r\langle\xi,\eta\rangle+1\bigr)^{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\lambda)}\bigl(\langle\xi,\eta\rangle\bigr)\,r^k.$$

Так как $|\langle\xi,\eta\rangle| \leqslant \|\xi\|\cdot\|\eta\|$ и $r\in[0,\sqrt{2}-1)$, то ряд сходится (см. условие (3)). Для $Y_{ms}(x)$ формула Грина будет выглядеть следующим образом:

$$Y_{ms}(x) = r^m\, Y_{ms}(\xi) =$$
$$= \gamma_n \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\,\frac{\partial\big[Y_{ms}(\eta)\big]}{\partial\nu} - Y_{ms}(\eta)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\Big)\,dS_\eta\,,$$

где ν — это нормаль в точке η к S^{n-1}. Далее получим

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\|x-\eta\|^{n-2}}\right) = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\|x-\rho\eta\|^{2\lambda}}\right]_{\rho=1} = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\big(r^2-2r\rho\langle\xi,\eta\rangle+\rho^2\big)^{\lambda}}\right]_{\rho=1} =$$

$$= \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^{2\lambda}\Big(\big(\frac{r}{\rho}\big)^2-2\big(\frac{r}{\rho}\big)\langle\xi,\eta\rangle+1\Big)^{\lambda}}\right]_{\rho=1} = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^{2\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^k\right]_{\rho=1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}(n-2+k)\,P_k^{(\lambda)}(\langle\xi,\eta\rangle)\,r^k.$$

При $\eta\in S^{n-1}$ также выполняется равенство

$$\frac{\partial\big[Y_{ms}(\eta)\big]}{\partial\nu} = \left(\frac{d\big[\rho^m\,Y_{ms}(\eta)\big]}{d\rho}\right)_{\rho=1} = \big[m\,\rho^{m-1}\,Y_{ms}(\eta)\big]_{\rho=1} = m\,Y_{ms}(\eta).$$

С учётом этих соотношений и разложения в ряд для производящей функции формула Грина будет выглядеть так:

$$r^m\,Y_{ms}(\xi) = \gamma_n\int_{S^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{\lambda}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,r^k\,m\,Y_{ms}(\eta)\,+$$
$$+\,Y_{ms}(\eta)\sum_{k=0}^{\infty}(k+n-2)\,P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,r^k\,dS_\eta =$$
$$= \gamma_n\sum_{k=0}^{\infty}r^k\int_{S^{n-1}}(m+k+n-2)\,P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta$$

при любом $r\in(0,\sqrt{2}-1)$. В силу произвольности r получим, что при $k\neq m$

$$\int_{S^{n-1}}(m+k+n-2)\,P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta = 0$$

или, так как $n\geqslant 3$,

$$\int_{S^{n-1}}P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta = 0.$$

По определению полинома Гегенбауэра приходим к равенству

$$\int_{S^{n-1}} G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ms}(\eta)\,dS_\eta = 0.$$

При $k=m$

$$\int_{S^{n-1}} P_k^{(\lambda)}\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ks}(\eta)\,dS_\eta = \frac{1}{\gamma_n(2k+n-2)}\,Y_{ks}(\xi),$$

так что

$$\frac{1}{C_k^{(n)}}\int_{S^{n-1}} G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)\,Y_{ks}(\eta)\,dS_\eta = \frac{1}{\gamma_n(2k+n-2)}\,Y_{ks}(\xi).$$

Обозначив $C=\frac{C_k^{(n)}}{\gamma_n(2k+n-2)}$, получим для всех $k,m\geqslant 0$

$$\Big(G_k\big(\langle\xi,\cdot\rangle\big),Y_{ms}(\cdot)\Big) = C\,Y_{ms}(\xi)\,\delta_{km}\,.$$

Константу C найдём при доказательстве теоремы 1. □

5. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Для $f(\eta)=G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)$ с учётом теоремы 2 и формулы (1) можно записать разложение

$$f(\eta)=G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{N(m)} f_{ms}\,Y_{ms}(\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{N(m)}\Big(G_k\big(\langle\xi,\cdot\rangle\big),Y_{ms}(\cdot)\Big)\,Y_{ms}(\eta)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{N(m)} C\,Y_{ms}(\xi)\,\delta_{km}\,Y_{ms}(\eta).$$

Отсюда следует, что

$$G_k\big(\langle\xi,\eta\rangle\big)=C\sum_{s=1}^{N(k)}Y_{ks}(\xi)\,Y_{ks}(\eta). \tag{6}$$

При $\xi=\eta$ в силу нормировки $G_k(1)=1$ получим тождество

$$1=C\sum_{s=1}^{N(k)}Y_{ks}^2(\xi),\qquad \xi\in S^{n-1}.$$

Проинтегрируем обе части тождества по сфере S^{n-1}. Придём к равенству

$$\sigma_n = CN(k). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$G_k\bigl(\langle\xi,\eta\rangle\bigr) = \frac{\sigma_n}{N(k)} \sum_{s=1}^{N(k)} Y_{ks}(\xi)\, Y_{ks}(\eta), \qquad \xi,\eta \in S^{n-1}.$$

Это и есть формула сложения для полиномов Гегенбауэра. $\square$

З а м е ч а н и е. Поясним, как выглядит формула сложения в случае $n = 2$, когда $\lambda = 0$ и вес имеет вид $(1-x^2)^{-1/2}$. Этому весу соответствуют ортогональные полиномы — полиномы Чебышёва $T_k(x)$. Для них $T_k(\cos\varphi) = \cos k\varphi$.

Возьмём точки $\xi,\eta \in S^1$ и запишем их в полярных координатах $\xi = (\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$, $\eta = (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$. Для скалярного произведения получаем формулу

$$\langle\xi,\eta\rangle = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Поэтому $T_k(\langle\xi,\eta\rangle) = \cos k(\varphi_1-\varphi_2)$.

В случае $n = 2$ имеем $\sigma_2 = 2\pi$, $N(k) = 2$ при $k \geqslant 1$, $\sigma_2/N(k) = \pi$. Пространство $\mathrm{Harm}(k)$ при $k \geqslant 1$ состоит из тригонометрических полиномов $a\cos k\varphi + b\sin k\varphi$ (см. [1], с. 387) и ортонормированный базис в нём образуют функции $Y_{k1}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\varphi$ и $Y_{k2}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\varphi$. Формула (4) принимает вид

$$\cos k(\varphi_1-\varphi_2) = \pi\Bigl(\frac{\cos k\varphi_1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos k\varphi_2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin k\varphi_1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin k\varphi_2}{\sqrt{\pi}}\Bigr).$$

Эта формула (после сокращения на π) называется формулой сложения для функции $\cos k\varphi$. По аналогии формула (4) называется формулой сложения для полиномов Гегенбауэра.

6. Свойство неотрицательной определённости полиномов Гегенбауэра.

Покажем, что полиномы Гегенбауэра $G_k(x)$ при $k \geqslant 0$ обладают свойством неотрицательной определённости. Это значит, что для произвольных $m > 0$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ из S^{n-1} матрица $A = \bigl\{G_k(\langle\xi_i,\xi_j\rangle)\bigr\}_{i,j=0}^{m}$ является неотрицательно определённой, то есть для любого $y \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\langle Ay, y\rangle \geqslant 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Полиномы Гегенбауэра $G_k(x)$ обладают свойством неотрицательной определённости.*

Доказательство. Опираемся на теорему 1. Рассмотрим произвольные $m > 0$, точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ из S^{n-1} и вектор $y \in \mathbb{R}^m$. В формуле (4) положим $\xi = \xi_i$, $\eta = \xi_j$. После этого умножим обе части равенства на $y_i\, y_j$ и просуммируем по $i, j \in 1 : m$. Получим

$$\langle Ay, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} G_k\bigl(\langle \xi_i, \xi_j\rangle\bigr)\, y_i\, y_j = \frac{\sigma_n}{N(k)} \sum_{s=1}^{N(k)} \Bigl[\sum_{i=1}^{m} y_i\, Y_{ks}(\xi_i)\Bigr]^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. *Уравнения математической физики: Учебник для вузов.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

2. Г. Сегё. *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ, 1962.

3. Р. Е. Афонин, А. Б. Певный. *Представление Гаусса для однородных полиномов и критерий сферического дизайна* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 августа 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0828`).

4. С. Л. Соболев. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.