САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Коровкин Александр Владимирович

Гармонический анализ на базе дискретного преобразования Ахмеда – Рао

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Санкт-Петербург
2004 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций математико–механического факультета Санкт–Петербургского Государственного Университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико–математических наук, профессор
МАЛОЗЕМОВ Василий Николаевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико–математических наук, профессор
ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович,

кандидат физико-математических наук
ТРЕТЬЯКОВ Алексей Андреевич

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Санкт–Петербургский Государственный Университет
им. проф. М.А. Бонч–Бруевича

Защита состоится "____"________________ 2005 г. в ____часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт–Петербургском Государственном Университете по адресу: 198504, Санкт–Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д.28, математико–механический факультет, ауд. 4526.

С диссертацией можно знакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт–Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт–Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "____"________________ 200 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. До 1970-х годов основным инструментом дискретного гармонического анализа являлось дискретное преобразование Фурье. В 1970-х годах стали больше внимания уделять другим ортогональным преобразованиям, таким как преобразование Уолша, Хаара, Виленкина—Крестенсона, дискретное косинусное и т.п. Для всех указанных преобразований были разработаны быстрые алгоритмы.

Одним из источников быстрых алгоритмов является матричная факторизация — представление матрицы ортогонального преобразования в виде произведения слабозаполненных матриц. Эффективные расчётные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матриц. В конце девяностых годов В.Н. Малоземовым и А.А. Третьяковым был разработан новый подход к быстрым ортогональным преобразованиям, при котором результаты промежуточных вычислений интерпретируются как коэффициенты разложения по некоторым ортогональным базисам. В пространстве дискретных периодических сигналов при длине периода, равной степени двойки, были построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. В каждом блоке сигналы различаются лишь сдвигом аргумента. Из блоков, принадлежащим разным базисам рекуррентной последовательности, формируются обобщённые вейвлетные базисы. Это значительно расширяет возможности цифровой обработки сигналов. В работах[1,2] с аналогичных позиций проанализировано дискретное преобразование Уолша и дискретное преобразование Виленкина—Крестенсона.

В диссертационной работе рассматривается дискретное преобразование Ахмеда–Рао. В отличие от традиционной ситуации, когда

---

[1]Малоземов В.Н., Третьяков А.А. *Секционирование, ортогональность и перестановки* // Вестн. С-Петербург. ун-та. Сер.1. 1999. Вып.1 (№1). С. 16-21.

[2]Малоземов В.Н., Машарский С.М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина-Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т.13. Вып.1. С. 111-157.

для получения быстрого алгоритма разложения сигнала факторизуется известная матрица ортогонального преобразования, а базисные функции определены явно, в монографии[3] реализован обратный подход. Дискретное преобразование Ахмеда–Рао задаётся в виде произведения разреженных матриц, а свойства базисных сигналов нужно вывести из свойств матриц сомножителей.

Цель работы.

1) *Изучить структуру и фундаментальные свойства базисов Ахмеда–Рао.*

2) *Построить быстрые алгоритмы декомпозиции и реконструкции сигналов и изображений по базисам Ахмеда–Рао.*

3) *Разработать соответствующее программное обеспечение.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовались методы дискретного гармонического анализа, матричной алгебры и вейвлетной теории.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) *В пространстве дискретных N-периодических сигналов построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, приводящих к обобщенному базису Ахмеда–Рао.*

2) *Получен явный вид функций из обобщенного базиса и указаны условия их ортогональности.*

3) *Для функций из серии дискретных базисов Ахмеда–Рао, включающей базисы Фурье и Уолша, получено более простое явное представление и изучен вопрос об их частоте.*

4) *Реализован алгоритм сжатия изображений на основе преобразования Ахмеда–Рао.*

---

[3] Ахмед Н., Рао К.Р. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.* М.: Связь, 1980.

Практическая ценность. По полученным результатам составлены программы на языке Java для обработки и сжатия изображений.

Апробация работы и публикации. По результатам диссертации сделан доклад на семинаре кафедры исследования операций мат-мех факультета СПбГУ и на международной конференции "Wavelets and splines"(Санкт-Петербург, 3-8 июля, 2003г.). По теме диссертации опубликовано 5 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести параграфов и списка литературы. Объем диссертации — 93 страницы. Список литературы насчитывает 46 наименований.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

В первом параграфе вводится терминология и описываются основные объекты дискретного гармонического анализа. Приводятся необходимые свойства кронекерова произведения матриц.

Пусть $k, j \in 0 : N-1,\ N = 2^s,\ s \in \mathbb{N}$. Если $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_2$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2$ — двоичные коды чисел k и j, то

$$\{k, j\}_s = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu j_\nu.$$

Дается определение и основные свойства перестановки reverse. Вводится обозначение

$$\mathrm{rev}_\nu(j) = (j_0, j_1, \ldots, j_{\nu-1})_2.$$

Операция rev_ν сопоставляет числу j число $\mathrm{rev}_\nu(j)$, двоичный код которого равен перевернутому двоичному коду числа j.

Положим $N_\nu = N/2^\nu,\ \Delta_\nu = 2^{\nu-1}$. Будут использоваться следующие обозначения: $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-ой степени из 1, $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть вещественного числа α, $\langle k \rangle_n = k - \lfloor k/n \rfloor n$ — остаток от деления целого числа k на натуральное n.

Во втором параграфе вводится определение функций Ахмеда–Рао:

$$w^{(r)}(k;j) = \omega_N^{kj}, \quad k = N_r k', \quad k' \in \{0,1,\ldots,2^r-1\}; \tag{1}$$

$$w^{(r)}(k;j) = \omega_N^{2^{p-r+1}\lfloor j/2^{p-r+1}\rfloor k} (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k),j\}_{p-r+1}},$$
$$k = N_{p+1}(2k'+1), \quad k' \in \{0,1,\ldots,2^p-1\}, \quad p \in \{r,\ldots,s-1\}, \tag{2}$$
$$r \in \{1,\ldots,s\}.$$

Теорема 1. *При каждом* $r \in \{1,\ldots,s\}$ *функции* $w^{(r)}(k;j)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, *ортогональны. При этом* $\|w^{(r)}(k;\cdot)\|^2 = N$.

Показано, что при $r = 1$ базис Ахмеда–Рао совпадает с базисом Уолша, а при $r = s$ — с экспоненциальным базисом. В общем случае, значения функций Ахмеда–Рао с индексом r принадлежат множеству $\Omega_r = \{1, \omega_{2^r}^1, \omega_{2^r}^2, \ldots, \omega_{2^r}^{2^r-1}\}$.

Теорема 2. *Частота функций* $w^{(r)}(k;j)$ *при* $r \in \{1,\ldots,s\}$, $k \in \{0,1,\ldots, N-1\}$ *равна* k.

В третьем параграфе предъявляется факторизация матрицы преобразования Ахмеда–Рао:

$$G^{(r)} = R_s D_s^{(r)} D_{s-1}^{(r)} \cdots D_1^{(r)}, \tag{3}$$

где

$$D_\nu^{(r)} = \mathrm{diag}\left[A_0^{(r)}, A_1^{(r)}, \ldots, A_{\Delta_\nu-1}^{(r)}\right] \otimes E_{s-\nu}, \quad \nu \in 1:s; \tag{4}$$

$$A_l^{(r)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(l)} \\ 1 & -\omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(l)} \end{pmatrix}, & l \in 0:\Delta_r-1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & l \in \Delta_r:\Delta_s-1; \end{cases} \tag{5}$$

$E_{s-\nu}$ — единичная матрица порядка $2^{s-\nu}$, R_s — матрица реверсных перестановок порядка 2^s, символ $\otimes$ означает тензорное умножение матриц.

На основе факторизации (3) при фиксированном r в пространстве $\mathbb{C}_N$ строится рекуррентная последовательность ортогональных базисов $\{g_\nu^{(r)}(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0,1,\ldots,s$, так, чтобы $g_0^{(r)}(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $g_s^{(r)}(\mathrm{rev}_s(k);j) = w_k^{(r)}(j)$. Здесь $\delta_N(j)$ — единичный $N-$периодический импульс. Сдвиги $\delta_N(j-k)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$ образуют естественный ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$.

Описаны в явном виде быстрые алгоритмы разложения сигналов по всем промежуточным базисам $g_\nu^{(r)}$. Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по базису $g_\nu^{(r)}(0), g_\nu^{(r)}(0), \ldots, g_\nu^{(r)}(N-1)$ при каждом $\nu = 0,1,\ldots,s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu^{(r)}(k)\, g_\nu^{(r)}(k).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x_0^{(r)}(k) &= x(k), \quad k \in 0 : N-1;\\
x_\nu^{(r)}(2lN_\nu + p) &= \\
&= \frac{1}{2}\big[x_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+p) + \overline{q^{(r)}(l)}\, x_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)\big],\\
x_\nu^{(r)}\big((2l+1)N_\nu + p\big) &= \\
&= \frac{1}{2}\big[x_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+p) - \overline{q^{(r)}(l)}\, x_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)\big],
\end{aligned}$$

$$l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1,\ldots,s, \tag{6}$$

$$q^{(r)}(l) = \begin{cases} \omega_N^{\mathrm{rev}_s(2l)}, & \text{если } \ l \in 0 : \Delta_r - 1,\\ 1, & \text{если } \ l \in \Delta_r : \Delta_s - 1. \end{cases}$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала x по дискретным функциям Ахмеда–Рао:

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s^{(r)}(k)\, g_s^{(r)}(k;j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s^{(r)}(\mathrm{rev}_s(k))\, w_k^{(r)}(j).$$

Вычислительная схема (6) названа *быстрым преобразованием Ахмеда–Рао, связанным с прореживанием по частоте.*

Для базисных сигналов $g_\nu^{(r)}$ получено явное представление. Для этого вводится система матриц $\{T_\nu^{(r)}\}_{\nu=1}^{s}$:

$$T_1^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_\nu^{(r)}[2l+\sigma,\, 2m+\tau] = A_l^{(r)}[\sigma,\tau]\, T_{\nu-1}^{(r)}[l,m], \tag{7}$$
$$l,m \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma,\tau \in \{0,1\}, \quad \nu = 2,\ldots,s.$$

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$g_\nu^{(r)}(lN_\nu + p) = \sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu^{(r)}[l,j]\, g_0^{(r)}(jN_\nu + p), \tag{8}$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Формула (8) дает полное представление о структуре базисных сигналов, однако коэффициенты в этом разложении не определены явно, а вычисляются рекуррентно по формуле (7).

Теорема 4. *Пусть* $\nu \in 1 : s$, $l,j \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. *Справедливо равенство*

$$T_\nu^{(r)}[l,j] = \begin{cases} \omega_N^{j\,\mathrm{rev}_s(l)}, \quad \text{если } l \in 0 : \Delta_{r+1} - 1; \\[2ex] \omega_N^{\Delta_{\kappa-r+2}\left\lfloor \frac{j}{\Delta_{\kappa-r+2}} \right\rfloor \mathrm{rev}_s(l)} (-1)^{\{l,\langle j\rangle_{\Delta_{\kappa-r+2}}\}_s}, \\ \qquad \text{если } l = \Delta_{\kappa+1} + l',\ l' \in 0 : \Delta_{\kappa+1} - 1, \\ \qquad\qquad \kappa \in r : \nu - 1. \end{cases}$$

В четвертом параграфе вводится новая факторизация матрицы преобразования Ахмеда–Рао:

$$G^{(r)} = H_s^{(r)} H_{s-1}^{(r)} \cdots H_1^{(r)} R_s,$$

где

$$H_\nu^{(r)} = R_s D_\nu^{(r)} R_s, \quad \nu \in 1:s.$$

Это позволяет построить ещё одну последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu^{(r)}(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, что $f_0^{(r)}(k;j) = \delta_N(j - \mathrm{rev}_s(k))$ и $f_s^{(r)}(k;j) = w_k^{(r)}(j)$. Описаны в явном виде формулы декомпозиции сигнала.

$$\begin{gathered}
x_0^{(r)}(k) = x(k), \quad k \in 0 : N-1; \\
x_\nu^{(r)}(l + p\Delta_{\nu+1}) = \\
= \frac{1}{2}\big[x_{\nu-1}^{(r)}(l + 2p\Delta_\nu) + \overline{b_\nu^{(r)}(l)}\, x_{\nu-1}^{(r)}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big)\big], \\
x_\nu^{(r)}(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \\
= \frac{1}{2}\big[x_{\nu-1}^{(r)}(l + 2p\Delta_\nu) - \overline{b_\nu^{(r)}(l)}\, x_{\nu-1}^{(r)}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big)\big], \\
l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s, \qquad (9) \\
b_\nu^{(r)}(l) = \begin{cases} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^l, & \text{если } \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) \in 0 : \Delta_r - 1, \\ 1, & \text{если } \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) \in \Delta_r : \Delta_\nu - 1. \end{cases}
\end{gathered}$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала x по функциям Ахмеда–Рао. Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам. Вычислительная схема (9) названа *быстрым преобразованием Ахмеда–Рао, связанным с прореживанием по времени.*

Для базисных сигналов $f_\nu^{(r)}$ получено явное представление. Для этого вводится система матриц $\{U_\nu\}_{\nu=1}^s$:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & q(0) \\ 1 & -q(0) \end{pmatrix},$$

$$U_\nu^{(r)}[l+\sigma\Delta_\nu,\, m+\tau\Delta_\nu] = U_{\nu-1}^{(r)}[l,m]\, A_{\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}^{(r)}[\sigma,\tau],$$
$$l,m\in 0:\Delta_\nu-1, \quad \sigma,\tau\in\{0,1\}, \quad \nu=2,\dots,s.$$

Теорема 5. *Справедливо представление*

$$f_\nu^{(r)}(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} U_\nu^{(r)}[l,j]\, f_0^{(r)}(j+p\Delta_{\nu+1}),$$

$$l\in 0:\Delta_{\nu+1}-1, \quad p\in 0:N_\nu-1, \quad \nu\in 1:s,$$

Теорема 6. *Пусть* $\nu\in 1:s$, $l,j\in 0:\Delta_{\nu+1}-1$. *Справедливы следующие утверждения:*

а) если $\nu\le r$, *то*

$$U_\nu^{(r)}[l,j] = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\mathrm{rev}_\nu(j)}, \quad l\in 0:\Delta_{\nu+1}-1;$$

б) если $\nu\ge r+1$, *то*

$$U_\nu^{(r)}[l,j] = \begin{cases} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\mathrm{rev}_\nu(j)}, & \text{\textit{если}} \;\; l=\Delta_{\nu-r+1}l', \;\; l'\in 0:\Delta_{r+1}-1; \\[2ex] \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\mathrm{rev}_\nu(\langle j\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})}(-1)^{\left\{\lfloor\frac{l}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\rfloor,\lfloor\frac{j}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\rfloor\right\}_\nu}, & \\ \qquad \text{\textit{если}} \;\; l=\Delta_{\nu-\kappa}(2l'+1), \;\; l'\in 0:\Delta_{\kappa+1}-1, & \\ \qquad\qquad \kappa\in r:\nu-1. & \end{cases}$$

В пятом параграфе введено понятие обобщенного дискретного преобразования Ахмеда–Рао и обобщенных функций Ахмеда–Рао.

Обобщенное дискретное преобразование Ахмеда–Рао задается следующей матрицей:

$$G = R_s D_s D_{s-1}\cdot\ldots\cdot D_1,$$

где

$$D_\nu = \mathrm{diag}[A_0, A_1, \dots, A_{\Delta_\nu-1}]\otimes E_{s-\nu}, \quad \nu\in 1:s;$$

$$A_l = \begin{pmatrix} 1 & q(l) \\ 1 & -q(l) \end{pmatrix}, \quad q(l) \in \mathbb{C}, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1.$$

Сигналы

$$w_k(j) = G[k, j], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{10}$$

названы *обобщёнными дискретными функциями Ахмеда–Рао.* Формулой (10) сигналы $w_k(j)$ определены на основном периоде $j \in 0 : N-1$. Далее они продолжаются N-периодически на все $j \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Система сигналов $w_0(j), w_1(j), \ldots, w_{N-1}(j)$ является базисом в пространстве $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда $q(l) \neq 0$ для любого $l \in 0 : \Delta_s - 1$.*

Лемма 2. *Если $|q(l)| = 1$ для любого $l \in 0 : \Delta_s - 1$, то система сигналов $w_0(j), w_1(j), \ldots, w_{N-1}(j)$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$.*

В дальнейшем изложении предполагается, что условие леммы 2 выполнено.

В пространстве сигналов $\mathbb{C}_N$ строятся две рекуррентные последовательности ортогональных базисов f_ν и g_ν, приводящие к обобщенному базису Ахмеда–Рао. Выводятся формулы декомпозиции и реконструкции сигналов. Получено явное представление обобщенных базисов Ахмеда–Рао:

Теорема 7. *Справедливо представление*

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[l, j] g_0(jN_\nu + p),$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu \in 1 : s,$$

где

$$T_\nu[l, j] = (-1)^{\{l,j\}_\nu} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} q^{j_\alpha}\big(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor\big),$$

Теорема 8. *Справедливо представление*

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} U_\nu[l, j]\, f_0(j + p\Delta_{\nu+1}),$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu \in 1 : s,$$

где

$$U_\nu = R_\nu T_\nu R_\nu.$$

В шестом параграфе результаты параграфов 3-4 перенесены на двумерный случай. Описаны двумерные варианты быстрого преобразования Ахмеда–Рао, связанного с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте. Описан алгоритм обработки как черно-белых, так и цветных изображений, являющийся алгоритмом сжатия с потерями. Приведены примеры такой обработки.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Коровкин А.В. *Обобщённое дискретное преобразование Ахмеда-Рао* // Вестник молодых учёных. Сер. "Прикладная математика и механика". 2003. №2. С. 33-41.

2. Коровкин А.В., Малозёмов В.Н. *Базисы Ахмеда-Рао* // Мат. заметки. 2004. Т.75. Вып. 6. С. 834-840.

3. Коровкин А.В., Машарский С.М. *О быстром преобразовании Ахмеда-Рао с прореживанием по частоте* // Журнал выч. мат. и матем. физики. 2004. Т.44. №6. С. 986-996.

4. Коровкин А.В., Машарский С.М. *О быстром преобразовании Ахмеда-Рао с прореживанием по времени* // Вестник С-Петербург. ун-та. Сер.1. 2004. Вып.2. С. 38-47.

5. Korovkin A.V., Malozemov V.N., Masharsky S.M. *Ahmed-Rao bases and wavelet expansions* // International conference Wavelets and Splines, Abstracts. SPb, 2003. P. 56-57.