Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование

В. Н. Малозёмов, Д. А. Хорохонов, Н. В. Чашников

В компьютерном геометрическом моделировании при представлении кривых и поверхностей обычно используются вектор-функции вещественного аргумента [1]. Особенность ситуации заключается в том, что реально учитываются значения вектор-функций лишь на конечном наборе аргументов. Поэтому естественно с самого начала представлять кривые и поверхности с помощью вектор-функций, заданных на некотором дискретном множестве.

В докладе показано, как использовать для представления замкнутых кривых и поверхностей дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами. Приведён пример построения замкнутой самопересекающейся (лепестковой) кривой и пример построения поверхности в виде завязанной в узел трубки.

1°. Пусть $N = mn$, где m, n — натуральные числа, отличные от единицы. Напомним, как вводятся дискретные N-периодические B-сплайны [2]. B-сплайн первого порядка на основном периоде $0:N-1$ задаётся явно

$$\widetilde{Q}_1(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0:n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n:N-n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N-n+1:N-1. \end{cases}$$

B-сплайны более высоких порядков определяются с помощью циклической свёртки

$$\widetilde{Q}_\nu(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(k) \widetilde{Q}_{\nu-1}(j-k), \quad \nu = 2, 3, \ldots.$$

Отметим, что B-сплайн $\widetilde{Q}_r(j)$ принимает только неотрицательные значения и

$$\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_r(j - pn) \equiv 1.$$

Дискретным N-периодическим сплайном порядка r с векторными коэффициентами называется вектор-функция вида

$$\widetilde{S}_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \, \widetilde{Q}_r(j - pn),$$

где $a_p \in \mathbb{R}^s$. Считаем, что коэффициенты a_p продолжены m-периодически на все целые p. В частности, $a_m = a_0$.

Для вычисления значений $\widetilde{S}_r(j)$ на основном периоде $0:N-1$ рекомендуется использовать следующую рекуррентную схему:

$$\widetilde{S}_1(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p\, \widetilde{Q}_1(j-pn),$$

$$\widetilde{S}_\nu(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_1(k)\widetilde{S}_{\nu-1}(j-k), \quad \nu = 2,3,\ldots,r.$$

2°. Рассмотрим задачу векторной сплайн-интерполяции

$$\widetilde{S}_r(ln) = z(l), \quad l \in 0:m-1, \tag{1}$$

где $z(l) = \big(z_1(l), z_2(l), \ldots, z_s(l)\big)$ — заданные векторы. Она распадается на s независимых скалярных подзадач

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{p\nu}\, \widetilde{Q}_r\big((l-p)n\big) = z_\nu(l), \quad l \in 0:m-1,\ \nu = 1,\ldots,s.$$

Решение каждой подзадачи (при фиксированном ν) известно [2]:

$$a_{p\nu} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{Z_\nu(k)}{\widetilde{T}_r(k)}\, \omega_m^{kp}, \quad p \in 0:m-1.$$

Здесь $\big\{Z_\nu(k)\big\}_{k=0}^{m-1}$ — дискретное преобразование Фурье от $\big\{z_\nu(l)\big\}_{l=0}^{m-1}$, $\omega_m = \exp(2\pi i/m)$,

$$\widetilde{T}_r(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ \big(2\sin\frac{\pi k}{m}\big)^{2r}\, \widetilde{\Lambda}_r(k) & \text{при } k \in 1:m-1; \end{cases}$$

$$\widetilde{\Lambda}_r(k) = \sum_{q=0}^{n-1} \left(2n \sin\frac{\pi(qm+k)}{N}\right)^{-2r}.$$

Решением задачи (1) является следующий набор векторов-коэффициентов сплайна $\widetilde{S}_r$: $a_p = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{ps})$, $p \in 0:m-1$.

Векторный интерполяционный сплайн $\widetilde{S}_r(j)$ обладает экстремальным свойством. Он минимизирует величину

$$\sum_{j=0}^{N-1} \big\| \big(\Delta^r x\big)(j) \big\|^2$$

среди всех дискретных N-периодических вектор-функций $x(j)$, удовлетворяющих ограничениям

$$x(ln) = z(l), \quad l \in 0:m-1.$$

3°. Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании для построения замкнутых кривых. Чтобы пояснить это, перепишем формулу для $\widetilde{S}_r(j)$ в виде

$$\widetilde{S}_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_r(j-pn)a_p.$$

При фиксированном j числа $\widetilde{Q}_r(j-pn)$, $p \in 0:m-1$, неотрицательны и в сумме равны единице, так что $\widetilde{S}_r(j)$ есть выпуклая комбинация векторов a_p. В геометрическом моделировании векторы a_p называются *полюсами.* Когда j пробегает значения от 0 до N, вектор $\widetilde{S}_r(j)$ описывает замкнутую дискретную кривую в $\mathbb{R}^s$, содержащуюся в выпуклой оболочке полюсов. Кривую с требуемыми свойствами получают либо при непосредственном задании полюсов, либо при полюсах, определяемых из интерполяционных условий.

ПРИМЕР 1. *Моделирование лепестковой кривой.*

Пусть $s = 2$, $r = 2$, $m = 20$, $n = 16$. На рис. 1 указаны 20 полюсов и значения соответствующего дискретного сплайна второго порядка. Замкнутая кривая, полученная путём соединения отрезками соседних точек сплайна, представлена на рис. 2.

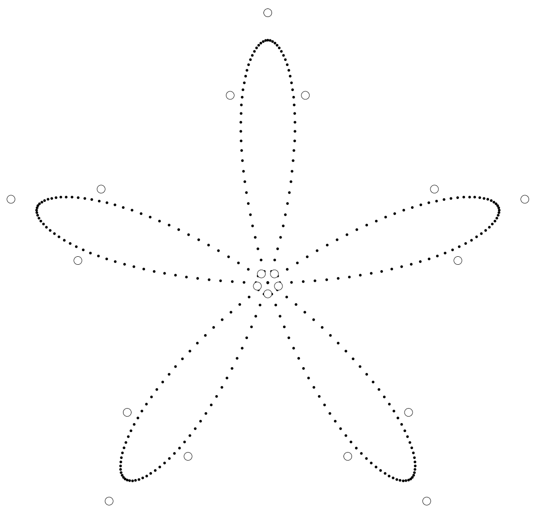

Рис. 1. Полюсы и значения сплайна

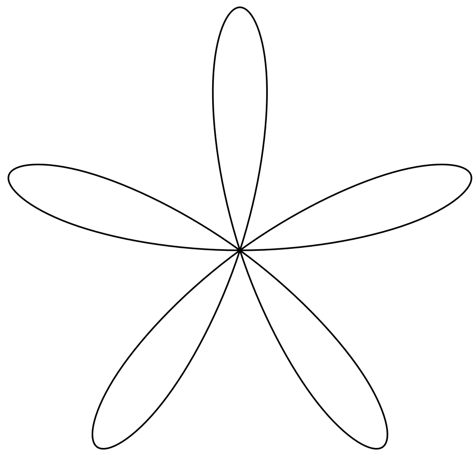

Рис. 2. Пятилистник

4°. Обратимся к двумерной задаче векторной сплайн-интерполяции. Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Зададим два набора вектор-функций

$$f_i\colon (0 : N_2 - 1) \to \mathbb{R}^3, \qquad i \in 0 : m_1 - 1,$$
$$g_j\colon (0 : N_1 - 1) \to \mathbb{R}^3, \qquad j \in 0 : m_2 - 1,$$

для которых выполнены равенства

$$f_i(jn_2) = g_j(in_1), \quad i \in 0 : m_1 - 1,\ j \in 0 : m_2 - 1.$$

Ставится задача: построить вектор-функцию $c\colon (0 : N_1 - 1) \times (0 : N_2 - 1) \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} c(in_1, \cdot) &= f_i, \quad i \in 0 : m_1 - 1, \\ c(\cdot, jn_2) &= g_j, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Выберем два натуральных числа r_1, r_2. Для каждого $q \in 0 : N_2 - 1$ построим сплайн $\widetilde{S}_{r_1}^{(q)}$, решающий интерполяционную задачу

$$\widetilde{S}_{r_1}^{(q)}(in_1) = f_i(q), \quad i \in 0 : m_1 - 1.$$

Положим $h_j(p) = g_j(p) - \widetilde{S}_{r_1}^{(jn_2)}(p)$ для всех $j \in 0 : m_2 - 1$, $p \in 0 : N_1 - 1$.

Далее для каждого $p \in 0 : N_1 - 1$ построим сплайн $\widetilde{S}_{r_2}^{(p)}$, решающий интерполяционную задачу

$$\widetilde{S}_{r_2}^{(p)}(jn_2) = h_j(p), \quad j \in 0 : m_2 - 1.$$

Нетрудно проверить, что дискретный сплайн

$$c(p, q) = \widetilde{S}_{r_1}^{(q)}(p) + \widetilde{S}_{r_2}^{(p)}(q), \quad p \in 0 : N_1 - 1,\ q \in 0 : N_2 - 1, \tag{3}$$

удовлетворяет условиям (2).

5°. Рассмотрим задачу построения поверхности, имеющей вид замкнутой трубки. Определять форму поверхности будет остов, состоящей из двух наборов дискретных кривых: кривые первого набора f_i будут идти вдоль трубки, кривые второго набора g_j — поперёк. Требуемая поверхность будет задаваться дискретным сплайном (3), N_1-периодическим по первому аргументу и N_2-периодическим — по второму.

ПРИМЕР 2. *Моделирование трубчатой поверхности.*

Пусть $m_1 = 2$, $n_1 = 5$ и $m_2 = 3$, $n_2 = 40$, так что $N_1 = 10$, $N_2 = 120$. Остовные кривые f_i и g_j изображены на рис. 3. На рис. 4 показана трубчатая поверхность, построенная по формуле (3). Остовные кривые выделены жирными линиями.

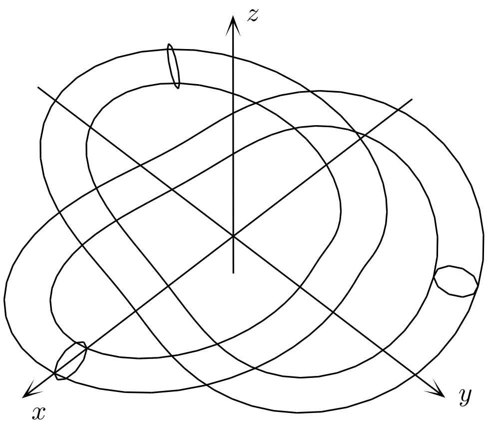

Рис. 3. Остовные кривые

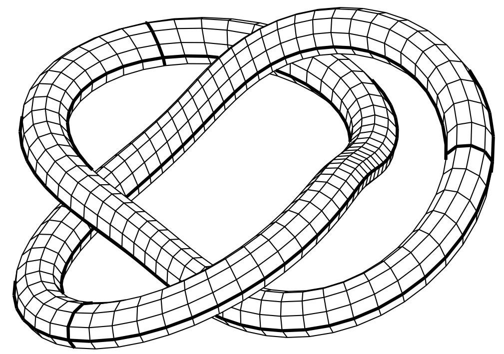
Рис. 4. Узел

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голованов Н. Н.* Геометрическое моделирование. М.: Физматлит, 2002. 472 с.

2. *Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. №8. С. 1235–1246.