Геометрическое моделирование с использованием проективных кривых и поверхностей Безье

М. И. Григорьев
m_grigoriev@list.ru

Проективная кривая Безье определяется конечным набором упорядоченных точек двух- или трёхмерного пространства, называемых полюсами, и положительными весами, приписываемыми этим точкам. За счёт изменения положения полюсов и значений весов, можно управлять формой кривой. В аналитическом плане проективная кривая Безье описывается дробно-рациональной функцией. Её представление связано с базисными полиномами Бернштейна. Это позволяет исследовать свойства таких кривых, основываясь на известных свойствах полиномов Бернштейна.

Аналогичным образом, матрица полюсов в трёхмерном пространстве и соответствующая ей матрица весов определяют поверхность, которая называется проективной поверхностью Безье.

В докладе на основе техники проективных кривых и поверхностей Безье предложен способ построения обобщенных поверхностей вращения. Приведены характерные графические примеры.

1°. Базисные полиномы Бернштейна степени n задаются формулой

$$b_k^n(u) = C_n^k \, u^k \, (1-u)^{n-k}, \qquad k \in 0 : n.$$

В частности, $b_0^k(u) = (1-u)^n$, $b_n^n(u) = u^n$, $b_0^0(u) \equiv 1$. Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{n} b_k^n(u) \equiv 1; \qquad b_k^n(u) > 0 \ \text{ при } \ u \in (0,1). \tag{1}$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^s$ (обычно s равно 2 или 3) точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$, которые называются *полюсами*. Кривая Безье n-го порядка определяется вектор-функцией [1–3]

$$B(u) = \sum_{k=0}^{n} P_k \, b_k^n(u), \qquad u \in [0,1]. \tag{2}$$

Очевидно, что $B(0) = P_0$, $B(1) = P_n$. Согласно (1), выражение (2) при любом $u \in (0,1)$ представляет собой выпуклую комбинацию полюсов P_k, $k \in 0 : n$. Значит, кривая Безье (2) принадлежит выпуклой оболочке, натянутой на полюсы P_k, $k \in 0 : n$. Изменение положения полюсов влечёт предсказуемое изменение формы кривой.

Припишем каждому полюсу P_k дополнительную координату $t = 1$ и рассмотрим полюсы $P'_k = (P_k, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^{s+1}$. Зафиксируем $n+1$ положительных чисел w_k, $k \in 0 : n$, которые будем называть *весами*, и введём полюсы $\widehat{P}_k = w_k P'_k = (w_k P_k, w_k)$. По ним может быть построена кривая Безье в $\mathbb{R}^{s+1}$:

$$\widehat{B}(u) = \Big(\sum_{k=0}^{n} w_k P_k \, b_k^n(u), \ \sum_{k=0}^{n} w_k \, b_k^n(u) \Big).$$

Спроецируем эту кривую на гиперплоскость $t = 1$, используя центральную проекцию с центром в начале координат, то есть поделим все координаты точек $\widehat{B}(u)$ на последнюю, которую затем отбросим. Получим

$$R(u) = \frac{\sum_{k=0}^{n} w_k\, P_k\, b_k^n(u)}{\sum_{k=0}^{n} w_k\, b_i^n(u)}\,, \qquad u \in [0,1]. \tag{3}$$

Формула (3) определяет кривую в $\mathbb{R}^s$, которая называется проективной кривой Безье n-го порядка [1, 2]. Её формой при неизменном положении полюсов P_k можно дополнительно управлять, варьируя веса w_k. Изменение значения веса приводит к приближению или удалению кривой от соответствующего полюса.

Очевидно, что и в этом случае $R(0) = P_0$, $R(1) = P_n$, и кривая $R(u)$, $u \in [0,1]$, лежит в выпуклой оболочке, натянутой на полюсы P_k, $k \in 0 : n$.

Рассмотрим случай проективной кривой Безье второго порядка. Зафиксируем три полюса P_0, P_1, P_2 на плоскости и три положительных веса w_0, w_1, w_2. С помощью перепараметризации уравнение (3) может быть приведено к стандартной форме [1]:

$$\widetilde{R}(u) = \frac{P_0\, b_0^2(u) + \sqrt{\mu}\, P_1\, b_1^2(u) + P_2\, b_2^2(u)}{b_0^2(u) + \sqrt{\mu}\, b_1^2(u) + b_2^2(u)}, \qquad u \in [0,1],$$

где $\mu = w_1^2 / w_0 w_2$. Как известно [1], проективная кривая Безье второго порядка является дугой параболы при $\mu = 1$, гиперболы при $\mu > 1$ и эллипса при $\mu \in (0,1)$. В частности, если полюсы P_0, P_1, P_2 расположены в вершинах прямоугольника со сторонами a, b, а значение μ равно $1/2$, то кривая $\widetilde{R}(u)$ представляет собой четверть эллипса с радиусами a и b (рис. 1).

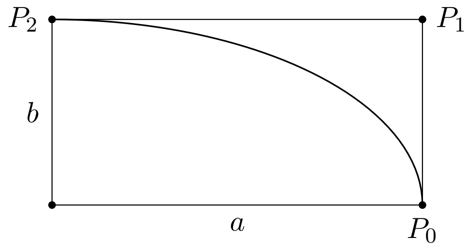

Рис. 1

2°. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^s$ (обычно s равно 3) задана матрица полюсов

$$\begin{matrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdots & P_{nm} \end{matrix}$$

По строкам этой матрицы построим $n + 1$ кривую Безье m-го порядка

$$B_k(v) = \sum_{l=0}^{m} P_{kl}\, b_l^m(v)\,, \qquad v \in [0,1], \quad k \in 0 : n.$$

Кривые $B_k(v)$ будем называть *образующими*. Зафиксируем $v \in [0,1]$. По точкам $B_0(v)$, $B_1(v), \ldots, B_n(v)$ можно в свою очередь построить кривую Безье $B(u,v)$, $u \in [0,1]$. Когда параметр v пробегает весь отрезок $[0,1]$, кривая $B(u,v)$ описывает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^s$, которая называется *поверхностью Безье порядка* $n \times m$ [1, 2]. Её аналитическое представление имеет вид

$$B(u,v) = \sum_{k=0}^{n} B_k(v)\, b_k^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} P_{kl}\, b_k^n(u)\, b_l^m(v)\,, \quad u,v \in [0,1]. \tag{4}$$

Сопоставим каждому полюсу P_{kl}, $k \in 0:n$, $l \in 0:m$, положительный вес w_{kl}. Действуя аналогично пункту 1°, определим проективную поверхность Безье порядка $n \times m$ [1, 2]:

$$R(u,v) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} w_{kl}\, P_{kl}\, b_k^n(u)\, b_l^m(v)}{\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} w_{kl}\, b_k^n(u)\, b_l^m(v)}, \qquad u,v \in [0,1]. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$R(0,0) = P_{00}, \quad R(1,0) = P_{n0}, \quad R(0,1) = P_{0m}, \quad R(1,1) = P_{nm}.$$

Заметим также, что выражение (5) снова представляет собой выпуклую комбинацию полюсов P_{kl}. Значит, проективная поверхность Безье будет располагаться внутри выпуклой оболочки, натянутой на эти полюсы.

3°. Напомним, что поверхность вращения в классическом понимании образована вращением некоторой плоской кривой относительно прямолинейной оси, лежащей в плоскости этой кривой. Первое возможное обобщение связано с заменой оси вращения на некоторую пространственную кривую. Кроме того, можно обобщить само понятие вращения так, что сечением такой поверхности становится не окружность, а эллипс с двумя независимыми радиусами.

Итак, пусть $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ задаёт некоторую непрерывно-дифференцируемую кривую. Будем называть её *кривой центров*. Предположим, что $\|C'(t)\| \neq 0$ при любом $t \in [0,1]$. Обозначим

$$T(t) = C'(t)/\|C'(t)\|, \qquad t \in [0,1].$$

Вектор $T(t)$ является единичным вектором касательной к кривой C.

Пусть далее $f_N, f_B\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_t\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывные функции. Вектор-функция

$$F(u) = (f_N(u), f_B(u), f_t(u)), \qquad u \in [0,1],$$

определяет параметрическую кривую в $\mathbb{R}^3$. Назовём её *кривой радиусов*. Функция $f_t(u)$ управляет положением центров вращения на кривой C.

Выберем также некоторую непрерывную вектор-функцию $B : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ такую, чтобы для всех t из отрезка $[0,1]$ вектор $B(t)$ имел единичную длину и был ортогонален вектору $T(t)$. Положим

$$N(t) = B(t) \times T(t), \tag{6}$$

где $\times$ — знак векторного умножения.

Зафиксируем некоторое $u \in [0,1]$. Рассмотрим точку на кривой центров C, соответствующую значению параметра t, равному $t_u = f_t(u)$. Пара $(N(t_u), B(t_u))$ определяет нормальную плоскость к кривой в этой точке (см. рис. 2). Рассмотрим лежащий в этой плоскости эллипс с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$:

$$G(u,v) = C(t_u) + \big(f_N(u)\cos 2\pi v\big)\, N(t_u) + \big(f_B(u)\sin 2\pi v\big)\, B(t_u), \qquad v \in [0,1]. \tag{7}$$

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая (7) порождает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая называется *обобщённой поверхностью вращения* кривой радиусов F относительно кривой центров C.

4°. Обобщённые поверхности вращения можно строить, используя технику проективных кривых и поверхностей Безье.

Рассмотрим три вектор-функции $P_0, P_1, P_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{gathered} P_0(u) = C(t_u) + f_N(u)N(t_u), \qquad P_2(u) = C(t_u) + f_B(u)B(t_u), \\ P_1(u) = C(t_u) + f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u). \end{gathered} \tag{8}$$

Зафиксируем $u \in [0,1]$. Уравнение проективной кривой второго порядка, построенной по полюсам $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_2(u)$ с параметром $\mu = 1/2$ имеет вид

$$\widetilde{G}(u,v) = \frac{P_0(u)\,(1-v)^2 + \sqrt{2}\,P_1(u)\,v\,(1-v) + P_2(u)\,v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}\,v\,(1-v) + v^2}\,, \qquad v \in [0,1].$$

Перепишем эту формулу

$$\widetilde{G}(u,v) = C(t_u) + \frac{\widetilde{P}_0(u)\,(1-v)^2 + \sqrt{2}\,\widetilde{P}_1(u)\,v\,(1-v) + \widetilde{P}_2(u)\,v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}\,v\,(1-v) + v^2}\,. \tag{9}$$

Здесь

$$\widetilde{P}_0(u) = f_N(u)N(t_u), \qquad \widetilde{P}_2(u) = f_B(u)B(t_u),$$
$$\widetilde{P}_1(u) = f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u).$$

На основании пункта 1° заключаем, что кривая (9) является четвертью эллипса с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$, лежащего в нормальной плоскости.

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая $\widetilde{G}(u,v)$ порождает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая по построению совпадает с четвертью обобщённой поверхности вращения $G(u,v)$ (рис. 2).

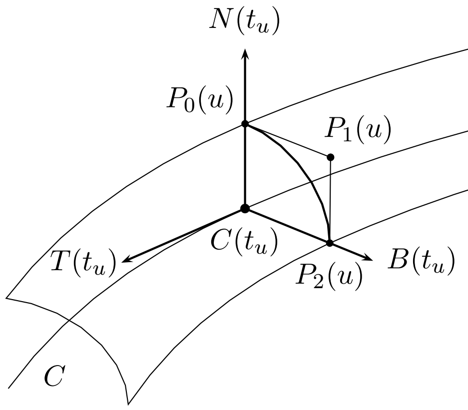

Рис. 2

5°. Укажем некоторые возможные способы выбора вектор-функции B и приведём примеры обобщённых поверхностей вращения.

Рассмотрим сначала простой случай, когда кривая центров C является плоской. Не ограничивая общности можно считать, что кривая C лежит в плоскости Oxz. Положим

$$B(t) \equiv (0,1,0). \tag{10}$$

С учётом (6) и (10) имеем

$$N(t) = (T_z(t), 0, -T_x(t)), \qquad t \in [0,1], \tag{11}$$

где $T_x(t)$, $T_z(t)$ — первая и третья компоненты вектор-функции $T(t)$.

На рис. 3 представлены кривая радиусов F (в данном примере f_N совпадает с f_B и $f_t(u) \equiv u$) и кривая центров C. Соответствующая им поверхность вращения изображена на рис. 4.

Когда в качестве кривой центров выбран отрезок оси Oz, и радиусы f_N, f_B тождественно равны, обобщённая поверхность вращения представляет собой обычную поверхность вращения. Пример такой поверхности дан на рис. 5. Порождающие кривая радиусов и кривая центров приведены на рис. 6.

Вернёмся к общему случаю пространственной кривой центров C. Укажем наиболее простой способ выбора B. Введём дополнительное предположение, что кривая центров обладает гладкостью второго порядка и что $\|C''(t)\| > 0$, $t \in [0,1]$. Положим

$$B(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{\|C'(t) \times C''(t)\|}, \qquad t \in [0,1]. \tag{12}$$

Выражение (12) определяет бинормальный вектор к кривой центров в точке $C(t)$. Значит, вектор $N(t) = B(t) \times T(t)$ равен вектору главной нормали к кривой C в этой точке, а правая тройка векторов $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ образует базис Френе [4].

На рис. 7 приведён пример обобщённой поверхности вращения, построенной с учётом выбранной в данном пункте вектор-функции $B(t)$. Порождающая кривая радиусов F представлена на рис. 8 (для наглядности приведены также её проекции на координатные плоскости Oxz и Oyz). В качестве кривой центров использована дуга винтовой кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farin G.* Curves and surfaces for CAGD. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002. xvii+499pp.

2. *Голованов Н. Н.* Геометрическое моделирование. М.: Физматлит, 2002. 472 с.

3. *Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н.* Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. №11. С. 1962-1971.

4. Погорелов А. И. *Дифференциальная геометрия.* 6-е изд. М.: Наука, 1974. 176 с.

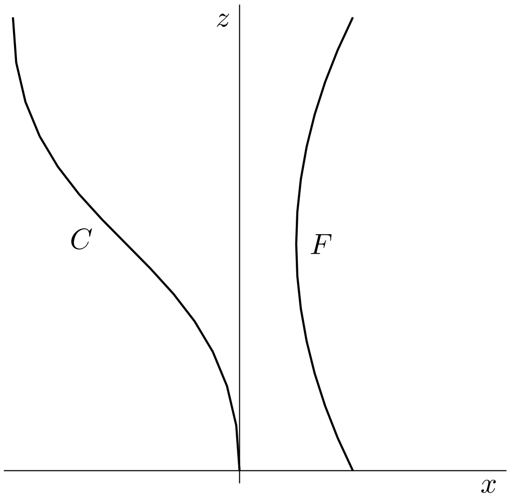

Рис. 3

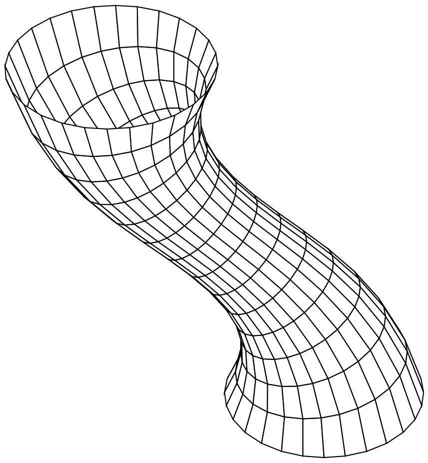

Рис. 4

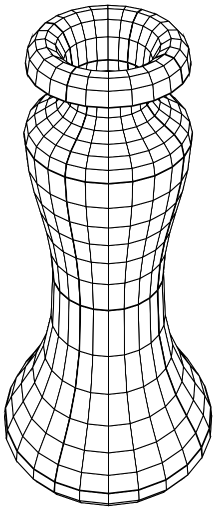

Рис. 5

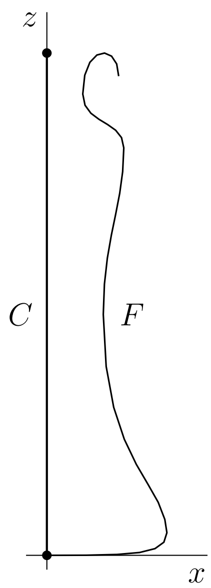

Рис. 6

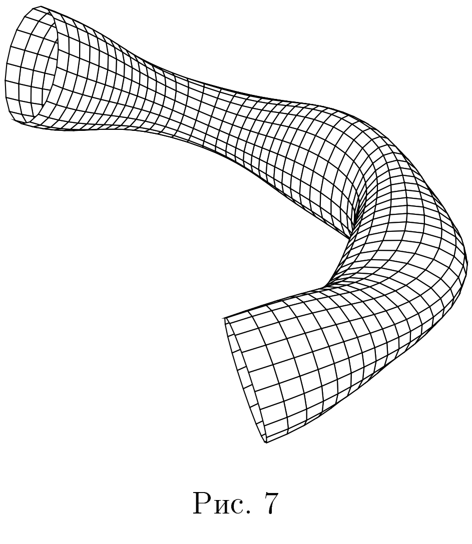

Рис. 7

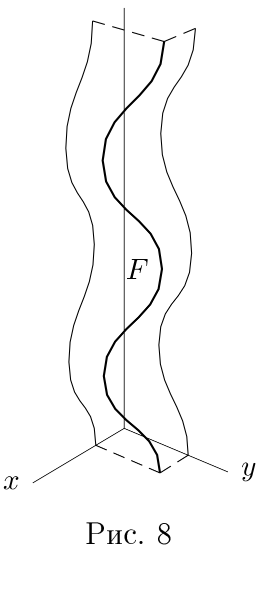

Рис. 8