ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

30 января 2010 г.

1°. Пусть m, n, r — натуральные числа, причём m и n отличны от единицы, $N = mn$ и $z(0), z(1), \ldots, z(m-1)$ — фиксированные комплексные числа. Обозначим через $Q_r(j)$ дискретный N-периодический B-сплайн порядка r [1; 2, с. 9–15].

Рассмотрим дискретный N-периодический сплайн вида

$$S_{r,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\, Q_r(j - pn), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S_{r,n}(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

В [3] изучалось поведение сплайна $S_{r,n}(j)$ при $n \to \infty$. Нас интересует поведение $S_{r,n}(j)$ при $r \to \infty$.

2°. Найдём дискретное преобразование Фурье от $S_{r,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для спектра $X_r = \mathcal{F}_N(S_{r,n})$ справедлива формула*

$$X_r = V_r\, Z, \tag{2}$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и при $q \in 0 : n-1$

$$V_r(qm + l) = \begin{cases} n\, \delta_n(q), & \text{если } l = 0; \\ n\left(\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{\sin(\pi(qm+l)/N)}{\sin(\pi(sm+l)/N)}\right)^{2r}\right)^{-1}, & \text{если } l \in 1 : m-1. \end{cases}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доказательство. Согласно (1) имеем

$$X_r(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\sum_{p=0}^{m-1} c(p)\, Q_r(j-pn) \Big) \omega_N^{-k(j-pn)-kpn} =$$
$$= \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\, \omega_m^{-kp} \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j)\, \omega_N^{-kj} = \big[\mathcal{F}_m(c)\big](k)\, \big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k).$$

Воспользуемся известной формулой [2, с. 22]

$$\big[\mathcal{F}_m(c)\big](k) = \frac{Z(k)}{T_r(k)}\,, \qquad k \in 0 : m-1,$$

где

$$T_r(k) = \begin{cases} n^{2r-1} & \text{при } k = 0; \\ \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} \bigg(\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin\big(\pi(sm+k)/N\big)} \bigg)^{2r} & \text{при } k \in 1 : m-1. \end{cases} \tag{3}$$

Получим

$$X_r(k) = V_r(k) Z(k), \qquad k \in 0 : N-1,$$

где

$$V_r(k) = \frac{\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k)}{T_r(k)}\,.$$

Далее, как известно [2, с. 11],

$$\big[\mathcal{F}_N(Q_r)\big](k) = \begin{cases} n^{2r} & \text{при } k = 0; \\ \bigg(\dfrac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} \bigg)^{2r} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Отсюда и из (3) в силу m-периодичности функции $T_r(k)$ следует, что

$$V_r(0) = n, \qquad V_r(m) = V_r(2m) = \cdots = V_r\big((n-1)m\big) = 0,$$

то есть $V_r(qm) = n\, \delta_n(q)$, $q \in 0 : n-1$. При $k = qm + l$, $l \in 1 : m-1$, формула для $V_r(k)$, указанная в формулировке предложения, проверяется непосредственно. □

3°. Обозначим

$$\alpha_k = \sin^2 \frac{\pi k}{N}\,, \qquad \Lambda_l = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{sm+l}^{-r}\,.$$

Тогда при $l \in 1 : m-1$

$$V_r(qm+l) = \bigl(\alpha_{qm+l}^{r}\,\Lambda_l\bigr)^{-1}, \qquad q \in 0 : n-1. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+l) = n, \qquad l \in 1 : m-1. \tag{5}$$

Это равенство верно и при $l = 0$.

Покажем, что

$$V_r(N-k) = V_r(k), \qquad k \in 1 : N-1. \tag{6}$$

Пусть $k = qm + l$, $q \in 0 : n-1$, $l \in 0 : m-1$. При $l = 0$ имеем $k = qm$, $q \in 1 : n-1$, так что

$$V_r(N-k) = V_r\bigl((n-q)m\bigr) = n\,\delta_n(n-q) = 0 = n\,\delta_n(q) = V_r(qm) = V_r(k).$$

Возьмём $l \in 1 : m-1$. В этом случае $N - k = (n-q-1)m + (m-l)$. В силу (4) получим

$$V_r(N-k) = \bigl(\alpha_{N-k}^{r}\,\Lambda_{m-l}\bigr)^{-1}.$$

Ясно, что $\alpha_{N-k} = \alpha_k$. Остаётся проверить, что $\Lambda_{m-l} = \Lambda_l$. Это сделать просто:

$$\Lambda_l = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{sm+l}^{-r} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{N-(sm+l)}^{-r} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{(n-s-1)m+(m-l)}^{-r} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{s'=0}^{n-1} \alpha_{s'm+(m-l)}^{-r} = \Lambda_{m-l}.$$

Отметим ещё одно свойство спектра V_r. При чётном m

$$V_r\bigl(\tfrac{m}{2}\bigr) = n\Biggl(\sum_{s=0}^{n-1}\biggl(\frac{\alpha_{m/2}}{\alpha_{sm+m/2}}\biggr)^{r}\Biggr)^{-1} = n\Biggl(2 + \sum_{s=1}^{n-2}\biggl(\frac{\alpha_{m/2}}{\alpha_{sm+m/2}}\biggr)^{r}\Biggr)^{-1}. \tag{7}$$

В частности, при чётном m и $n = 2$

$$V_r\bigl(\tfrac{m}{2}\bigr) = \tfrac{n}{2} = 1.$$

4°. Введём N-периодический спектр V_* следующим образом:

$$V_*(k) = \begin{cases} n & \text{при } k = 0, 1, \dots, \lfloor (m-1)/2 \rfloor, \\ 0 & \text{при } k = \lfloor m/2 \rfloor + 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor. \end{cases}$$

При чётном m дополнительно положим $V_*(m/2) = n/2$. С помощью равенства $V_*(N-k) = V_*(k)$ распространим V_* на весь основной период $0 : N-1$. На рис. 1 представлены графики $V_*(k)$ при $m = 3$, $n = 3$ и $m = 4$, $n = 3$.

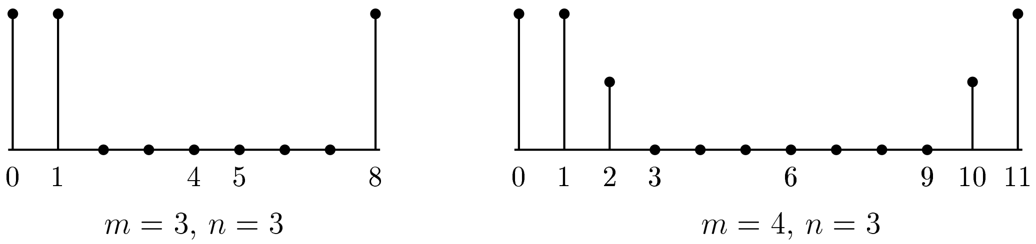

Рис. 1. Графики спектра $V_*(k)$ на основном периоде

Очевидно, что $V_*(qm) = n\,\delta_n(q)$, $q \in 0 : n-1$, поскольку

$$\lfloor m/2 \rfloor + 1 \leqslant m \qquad \text{и} \qquad (n-1)m \leqslant N - \lfloor m/2 \rfloor - 1.$$

Значит, при всех натуральных r

$$V_r(qm) = V_*(qm), \qquad q \in 0 : n-1. \tag{8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r \to \infty} V_r(k) = V_*(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $k = qm + l$, $q \in 0 : n-1$, $l \in 0 : m-1$. При $l = 0$ предложение является тривиальным следствием равенства (8). В дальнейшем считаем, что $l \in 1 : m-1$.

Нам потребуются некоторые свойства чисел $\alpha_k = \sin^2(k\pi/N)$, $k \in 0 : N-1$.

1) Наибольшее значение α_k равно $\alpha_{\lfloor N/2 \rfloor}$. При нечётном N оно достигается на двух индексах $k = (N-1)/2$ и $k = (N+1)/2$; при чётном N — на одном $k = N/2$.

2) $\alpha_{sm+l} > \alpha_l$ при $s \in 1 : n-1$ и $l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor$. Это следует из неравенств $2l < m$,

$$l < sm + l \leqslant (n-1)m + l < nm - l$$

и равенства $\alpha_l = \alpha_{N-l}$ (см. рис. 2).

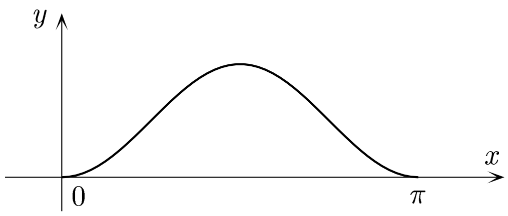

Рис. 2. График функции $y = \sin^2 x$ на периоде

3) Если m чётно, то $\alpha_{sm+m/2} > \alpha_{m/2}$ при $s \in 1 : n-2$. Действительно,

$$m/2 < sm + m/2 \leqslant (n-2)m + m/2 < nm - m/2.$$

Вернёмся к доказательству предложения. Сначала рассмотрим случай $q = 0$, $l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor$. Имеем

$$V_r(l) = n\biggl(1 + \sum_{s=1}^{n-1}\Bigl(\frac{\alpha_l}{\alpha_{sm+l}}\Bigr)^r\biggr)^{-1}.$$

В силу свойства 2) чисел α_k получаем

$$\lim_{r\to\infty} V_r(l) = n = V_*(l), \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor. \tag{10}$$

Теперь воспользуемся равенством (5), согласно которому

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+l) = n, \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor.$$

Все величины $V_r(qm+l)$ неотрицательны и $V_r(l) \to n$ при $r \to \infty$, поэтому при $q \in 1 : n-1$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+l) = 0 = V_*(qm+l), \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor.$$

Мы приняли во внимание, что $\lfloor (m-1)/2 \rfloor + \lfloor m/2 \rfloor = m - 1$ и

$$(n-1)m + \lfloor (m-1)/2 \rfloor = N - \lfloor m/2 \rfloor - 1.$$

Таким образом, при всех $q \in 0 : n-1$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+l) = V_*(qm+l), \qquad l \in 1 : \lfloor (m-1)/2 \rfloor.$$

При чётном m дополнительно рассмотрим случай $l = m/2$, когда $V_*(l) = n/2$. На основании (7) и свойства 3) чисел α_k имеем

$$\lim_{r\to\infty} V_r(m/2) = \tfrac{n}{2} = V_*(m/2).$$

Ясно также, что в силу (6) и аналогичного свойства спектра V_*

$$\lim_{r\to\infty} V_r\big((n-1)m+m/2\big) = \lim_{r\to\infty} V_r(m/2) = \tfrac{n}{2} = \\ = V_*(m/2) = V_*\big((n-1)m+m/2\big).$$

Согласно (5)

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+m/2) = n.$$

Учитывая, что $V_r(m/2) \to n/2$ и $V_r\big((n-1)m+m/2\big) \to n/2$ при $r \to \infty$, заключаем, что при $q \in 1 : n-2$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+m/2) = 0 = V_*(qm+m/2).$$

Значит, при всех $q \in 0 : n-1$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+m/2) = V_*(qm+m/2). \tag{11}$$

При $m = 2$ множество $1 : m-1$ состоит из единственного индекса $l = 1 = m/2$. В этом случае соотношение (11) завершает доказательство предложения. В дальнейшем считаем, что $m \geqslant 3$. Это гарантирует непустоту множества $\lfloor m/2\rfloor + 1 : m-1$.

Согласно (5)

$$\sum_{q=0}^{n-1} V_r(qm+l) = n, \qquad l \in \lfloor m/2\rfloor + 1 : m-1, \tag{12}$$

при этом в силу (6) и (10)

$$\lim_{r\to\infty} V_r\big((n-1)m+l\big) = \lim_{r\to\infty} V_r(m-l) = \\ = n = V_*(m-l) = V_*\big((n-1)m+l\big).$$

Мы приняли во внимание, что при указанных l

$$1 \leqslant m-l \leqslant \big\lfloor (m-1)/2 \big\rfloor.$$

Теперь из (12) следует, что при $q \in 0 : n-2$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+l) = 0 = V_*(qm+l), \qquad l \in \lfloor m/2\rfloor + 1 : m-1.$$

Значит, при всех $q \in 0 : n-1$

$$\lim_{r\to\infty} V_r(qm+l) = V_*(qm+l), \qquad l \in \lfloor m/2\rfloor + 1 : m-1.$$

Предложение доказано. □

5°. Обозначим $\mu = \lfloor (m-1)/2 \rfloor$ и введём дискретные тригонометрические полиномы

$$h_{m,n}(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} \qquad \text{при нечётном } m \ (m = 2\mu+1),$$

$$h_{m,n}(j) = \frac{1}{m} \Big(\cos \tfrac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} \Big) \qquad \text{при чётном } m \ (m = 2\mu+2).$$

Отметим, что при всех m

$$h_{m,n}(ln) = \delta_m(l), \qquad l \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Действительно, при $m = 2\mu+1$

$$h_{m,n}(ln) = \frac{1}{m} \Big(\sum_{k=-\mu}^{-1} \omega_m^{(k+m)l} + \sum_{k=0}^{\mu} \omega_m^{kl} \Big) =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{kl} = \delta_m(l).$$

При $m = 2\mu+2$

$$h_{m,n}(ln) = \frac{1}{m} \Big((-1)^l + \sum_{k=-\mu}^{-1} \omega_m^{(k+m)l} + \sum_{k=0}^{\mu} \omega_m^{kl} \Big) =$$

$$= \frac{1}{m} \Big((-1)^l + \sum_{k=\mu+2}^{m-1} \omega_m^{kl} + \sum_{k=0}^{\mu} \omega_m^{kl} \Big).$$

Учитывая, что $\omega_m^{(\mu+1)l} = \omega_m^{(m/2)\,l} = \omega_2^l = (-1)^l$, приходим к (13).

В силу (13) тригонометрический полином

$$t_{m,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, h_{m,n}(j - pn)$$

удовлетворяет интерполяционному условию

$$t_{m,n}(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} S_{r,n}(j) = t_{m,n}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Принципиальным является следующее равенство:

$$\mathcal{F}_N(h_{m,n}) = V_* \,. \tag{14}$$

Проверим его. При нечётном m имеем

$$\big[\mathcal{F}_N(h_{m,n})\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{m,n}(j)\,\omega_N^{-kj} = \frac{1}{m}\sum_{s=-\mu}^{\mu}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{(s-k)j} = n\sum_{s=-\mu}^{\mu}\delta_N(s-k) =$$

$$= n\Big(\sum_{s=0}^{\mu}\delta_N(s-k) + \sum_{s=N-\mu}^{N-1}\delta_N(s-k)\Big) = V_*(k).$$

Аналогично при чётном m

$$\big[\mathcal{F}_N(h_{m,n})\big](k) = \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\omega_N^{(m/2)j} + \omega_N^{-(m/2)j}\Big)\,\omega_N^{-kj} + n\sum_{s=-\mu}^{\mu}\delta_N(s-k) =$$

$$= \frac{n}{2}\Big[\delta_N\big(k-\tfrac{m}{2}\big) + \delta_N\big(k-(N-\tfrac{m}{2})\big)\Big] + n\sum_{s=-\mu}^{\mu}\delta_N(s-k) = V_*(k).$$

Далее, согласно (14)

$$\big[\mathcal{F}_N(t_{m,n})\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,h_{m,n}(j-pn)\Big)\,\omega_N^{-k(j-pn)-kpn} =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,\omega_m^{-kp}\,\sum_{j=0}^{N-1} h_{m,n}(j)\,\omega_N^{-kj} =$$

$$= \big[\mathcal{F}_m(z)\big](k)\,\big[\mathcal{F}_N(h_{m,n})\big](k) = Z(k)\,V_*(k). \tag{15}$$

Учитывая формулу обращения для ДПФ, (2) и (15), получаем

$$\big|S_{r,n}(j) - t_{m,n}(j)\big| = \frac{1}{N}\Big|\sum_{k=0}^{N-1}\big(V_r(k) - V_*(k)\big)Z(k)\,\omega_N^{kj}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\big|V_r(k) - V_*(k)\big|\,\big|Z(k)\big|.$$

Остаётся сослаться на (9). Предложение доказано. $\square$

6°. Итак, установлено, что пределом дискретного интерполяционного сплайна $S_{r,n}(j)$ при $r \to \infty$ является дискретный интерполяционный тригонометрический полином $t_{m,n}(j)$. Найдём предел $t_{m,n}(j)$ при $n \to \infty$.

Прежде всего покажем, что при $m = 2\mu + 1$

$$h_{m,n}(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi j/n)}{m \sin(\pi j/N)}, & \text{если } j \in 1 : N-1, \end{cases} \tag{16}$$

и при $m = 2\mu + 2$

$$h_{m,n}(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \\ \frac{1}{m} \sin(\pi j/n) \operatorname{ctg}(\pi j/N), & \text{если } j \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{17}$$

При $j = 0$ формулы (16) и (17) очевидны. Пусть $j \in 1 : N-1$ и $m = 2\mu+1$. Имеем

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = \frac{\omega_N^{-\mu j} - \omega_N^{(\mu+1)j}}{1 - \omega_N^j} = \omega_N^{-\mu j} \, \frac{1 - \omega_n^j}{1 - \omega_N^j} \, .$$

Далее

$$\begin{aligned} 1 - \omega_n^j &= \bigl(1 - \cos(2\pi j/n)\bigr) - i \, \sin(2\pi j/n) = \\ &= -2i \, \sin(\pi j/n) \bigl[\cos(\pi j/n) + i \, \sin(\pi j/n)\bigr] = \\ &= -2i \, \sin(\pi j/n) \, \omega_{2n}^j. \end{aligned}$$

Аналогично

$$1 - \omega_N^j = -2i \, \sin(\pi j/N) \, \omega_{2N}^j \, .$$

Значит,

$$\frac{1 - \omega_n^j}{1 - \omega_N^j} = \frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} \, \omega_{2N}^{(m-1)j}. \tag{18}$$

Для завершения доказательства формулы (16) осталось учесть, что

$$\omega_N^{-\mu j} \, \omega_{2N}^{(m-1)j} = \omega_{2N}^{(-m+1)j} \, \omega_{2N}^{(m-1)j} = 1.$$

Теперь рассмотрим случай $j \in 1 : N-1$ и $m = 2\mu + 2$. Имеем

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = \omega_N^{-(\mu+1)j} \, \frac{\omega_N^j - \omega_n^j}{1 - \omega_N^j} = -\omega_{2n}^{-j} + \omega_{2n}^{-j} \, \frac{1 - \omega_n^j}{1 - \omega_N^j} \, .$$

В силу (18)

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = -\omega_{2n}^{-j} + \omega_{2N}^{-j} \frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} =$$

$$= -\cos\tfrac{\pi j}{n} + i\,\sin\tfrac{\pi j}{n} + \big(\cos\tfrac{\pi j}{N} - i\,\sin\tfrac{\pi j}{N}\big)\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)} =$$

$$= -\cos\tfrac{\pi j}{n} + \cos\tfrac{\pi j}{N}\,\frac{\sin(\pi j/n)}{\sin(\pi j/N)}\,.$$

Мнимая часть оказалась равной нулю. Последнюю формулу перепишем в виде

$$\cos\tfrac{\pi j}{n} + \sum_{k=-\mu}^{\mu} \omega_N^{kj} = \sin\tfrac{\pi j}{n}\,\operatorname{ctg}\tfrac{\pi j}{N}\,.$$

Поделив на m, придём к (17).

7°. Введём непрерывные m-периодические на $\mathbb{R}$ ядра Дирихле:

$$d_m(x) = \frac{\sin(\pi x)}{m\,\sin(\pi x/m)} \qquad \text{при нечётном } m,$$

$$d_m(x) = \tfrac{1}{m}\,\sin(\pi x)\operatorname{ctg}(\pi x/m) \qquad \text{при чётном } m.$$

Очевидно, что

$$d_m(j/n) = h_{m,n}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

и согласно (13)

$$d_m(l) = \delta_m(l), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Последнее равенство гарантирует, что непрерывная m-периодическая функция

$$u_m(x) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\,d_m(x-p)$$

удовлетворяет интерполяционному условию

$$u_m(l) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Равномерно по $x \in [0, m]$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} t_{m,n}\big(\lfloor nx \rfloor\big) = u_m(x). \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$t_{m,n}\big(\lfloor nx\rfloor\big)-u_m(x)=\Big[t_{m,n}\big(\lfloor nx\rfloor\big)-u_m\Big(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Big)\Big]+\Big[u_m\Big(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Big)-u_m(x)\Big].$$

Согласно (19)

$$\begin{aligned}u_m\Big(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\Big)&=\sum_{p=0}^{m-1}z(p)\,d_m\Big(\tfrac{\lfloor nx\rfloor-pn}{n}\Big)=\\&=\sum_{p=0}^{m-1}z(p)\,h_{m,n}\big(\lfloor nx\rfloor-pn\big)=t_{m,n}\big(\lfloor nx\rfloor\big),\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}t_{m,n}\big(\lfloor nx\rfloor\big)-u_m(x)&=u_m\big(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\big)-u_m(x)=\\&=\sum_{p=0}^{m-1}z(p)\Big[d_m\big(\tfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}-p\big)-d_m(x-p)\Big].\end{aligned}\tag{21}$$

Отметим, что $\lfloor nx\rfloor/n\in[0,m]$ при $x\in[0,m]$ и

$$-\frac{1}{n}=\frac{nx-1}{n}-x\leqslant\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}-x\leqslant\frac{nx}{n}-x=0.$$

Теперь (20) следует из (21) и равномерной непрерывности ядра Дирихле $d_m(x)$ на отрезке $[-m+1,m]$. □

8°. Технически сложное предложение 2 было, по существу, установлено в [4]. Мы привели усовершенствованное его доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические B-сплайны* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 4 (№ 22). С. 14–19.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

3. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

4. Бер М. Г., Малозёмов В. Н. *Об интерполяции дискретных периодических данных* // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. № 4. С. 60–68.