ВЫРОЖДЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

И. В. Агафонова
ivagafonova@home.eltel.net

В А. Даугавет
vadaug@yandex.ru

11 декабря 2010 г.

Рассматривается задача линейного программирования в канонической форме:

$$f(x) := c[N] \times x[N] \to \min_{x \in \Omega}, \tag{1}$$

где

$$\Omega = \{x[N] \mid A[M,N] \times x[N] = b[M],\ x[N] \geqslant \mathbb{O}\},$$
$$M = \{1, 2, \dots, m\}, \quad N = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Элементы векторов $c[N]$ и $b[M]$ и матрицы $A[M,N]$ — произвольные вещественные числа.

В докладе представлен конечный алгоритм для решения задачи (1), основанный на модифицированном симплекс-методе, называемом также симплекс-методом с обратной матрицей [1, 2]. Алгоритм не требует ни предварительных расчётов, ни наложения каких-либо дополнительных условий на A, b, c, в том числе условия невырожденности задачи, обеспечивающего конечную сходимость симплекс-метода (см. [1]). Конечную сходимость описываемого алгоритма гарантирует применение правила Блэнда для предотвращения зацикливания (см. Приложения A, B).

Алгоритм состоит из двух последовательных этапов, на которых симплекс-методом решаются приведённые ниже задачи линейного программирования: вспомогательная задача — на первом этапе (см. [3]) и некоторая задача, равносильная исходной — на втором.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Первый этап алгоритма

Введём индексное множество $M' = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$, новые переменные $x[i]$, $i \in M'$, называемые *искусственными*, и диагональную матрицу $\mathcal{E}[M, M']$ с компонентами

$$\mathcal{E}[i, i+n] = \begin{cases} \operatorname{sign} b[i], & \text{если } b[i] \neq 0, \\ 1, & \text{если } b[i] = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \mu(x) := \sum_{i \in M'} x[i] \to \min, \\ A[M, N] \times x[N] + \mathcal{E}[M, M'] \times x[M'] = b[M], \\ x[N] \geqslant \mathbb{O}, \quad x[M'] \geqslant \mathbb{O}. \end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим $N' = N \cup M'$. В задаче (2) матрица ограничений имеет ранг m. Любой набор из m линейно независимых столбцов этой матрицы является базисом в пространстве $\mathbb{R}^m$ и может быть задан множеством индексов столбцов $\mathit{\Gamma} \subset N'$, $|\mathit{\Gamma}| = m$, которое, как и множество самих столбцов, будем кратко называть *базисом задачи* (2).

По каждому базису $\mathit{\Gamma}$ строится базисное решение $x[N']$ системы ограничений-равенств задачи (2) — то единственное, в котором $x[N' \setminus \mathit{\Gamma}] = \mathbb{O}$. Если в этом решении оказывается $x[\mathit{\Gamma}] \geqslant \mathbb{O}$, то $x[N']$ — *базисный план* задачи (2).

Очевидным базисом задачи (2) является M', базисный план $x[N']$ имеет компоненты

$$x[i] = \begin{cases} 0, & i \in N, \\ \big|b[i-n]\big|, & i \in M'. \end{cases}$$

Обратная базисная матрица равна $\mathcal{E}$.

Так как целевая функция задачи ограничена снизу нулём, то задача (2) имеет решение.

Начиная с приведённого базисного плана, задачу (2) решают модифицированным симплекс-методом с применением правила Блэнда. В Приложении А помещено сжатое описание этого метода для задачи, записанной в виде (1), и, конечно, для (2) следует в этом описании под N понимать N' и очевидным образом изменить A и c.

При решении задачи (2) симплекс-методом искусственную переменную, как только она выйдет из базиса, рекомендуется сразу убирать из рассмотрения. Строго говоря, мы на первом этапе не решаем неизменную задачу (2) от начала и до конца, а переходим после каждого исключения искусственной переменной из базиса к решению новой, «укороченной» задачи, которую начинаем решать с имеющегося базисного плана.

В результате этого процесса будет получена оптимальная пара последней задачи такой цепочки:

- базис $\Gamma^0 = N^0 \cup M^0$, $N^0 \subset N$,
- план $x^0[N \cup M^0]$, $M^0 \subset M'$.

Оптимальное значение целевой функции равно $\mu^0 = \sum\limits_{i \in M^0} x^0[i]$.

Эта информация передаётся на следующий этап.

Второй этап алгоритма

Перед началом второго этапа возможны три ситуации.

1) $\mu^0 > 0$. Это означает, что множество планов Ω исходной задачи (1) пусто, то есть задача (1) не имеет решения.
2) $\mu^0 = 0$ и $M^0 = \varnothing$. Это означает, что в базисе не осталось искусственных переменных и вектор $x^0[N]$ является начальным базисным планом задачи (1) с базисом $N^0 \subseteq N$.
3) $\mu^0 = 0$ и $M^0 \neq \varnothing$. Это означает, что
$$x^0[M^0] = \mathbb{O}, \qquad x^0[N] \in \Omega,$$
но базисом является $\Gamma^0 = N^0 \cup M^0$.

В последнем случае сохраним искусственные базисные столбцы $\mathcal{E}[M, j]$, $j \in M^0$, но их знаки изменим на противоположные. Введём новое множество планов

$$\Omega_* = \left\{ x[N \cup M^0] \;\middle|\; \begin{array}{c} A[M,N] \times x[N] - \mathcal{E}[M, M^0] \times x[M^0] = b[M], \\ x[N] \geqslant \mathbb{O}, \qquad x[M^0] \geqslant \mathbb{O} \end{array} \right\}. \tag{3}$$

Задача второго этапа

$$\varphi(x) := c[N] \times x[N] + \sum_{i \in M_0} x[i] \to \min_{x \in \Omega_*} \tag{4}$$

решается, как и задача (2), симплекс-методом с применением правила Блэнда. Для второго случая, когда $M^0 = \varnothing$, задача (4) совпадает с (1).

В Приложении C доказывается, что решение задачи (4) после отбрасывания равных нулю искусственных переменных даёт решение исходной задачи (1).

Приступая к решению задачи (4), мы уже имеем её базис $\mathit{\Gamma}^0$ и соответствующий ему базисный план x^0. Обратная базисная матрица получается из $B^0[\mathit{\Gamma}^0, M]$ заменой знаков строк её подматрицы $B^0[M^0, M]$ на противоположные.

Заметим, что если на итерации симплекс-метода будет выведена из базиса какая-либо искусственная переменная $x[i]$, $i \in M^0$, то её, как это делалось и на первом этапе, следует сразу исключить из рассмотрения.

Приложение A
Краткое описание одной итерации модифицированного симплекс-алгоритма с применением правила Блэнда

Решается задача (1). В начале итерации имеются:

- базис $\mathit{\Gamma}$;
- соответствующий этому базису базисный план $x[N]$;
- соответствующая этому базису обратная базисная матрица

$$B[\mathit{\Gamma}, M] = (A[M, \mathit{\Gamma}])^{-1}.$$

Проводятся действия:

1) **Проверка базисного плана x на оптимальность.** Найдём вектор двойственных переменных

$$u[M] = c[\mathit{\Gamma}] \times B[\mathit{\Gamma}, M]^1, \tag{5}$$

после чего вычислим *оценки* всех столбцов матрицы $A[M, N]$:

$$\Delta[N] = u[M] \times A[M, N] - c[N].$$

На самом деле $\Delta[\mathit{\Gamma}] = u[M] \times A[M, \mathit{\Gamma}] - c[\mathit{\Gamma}] = \mathbb{O}$, поэтому вычислять оценки $\Delta[j]$ нужно только при $j \in N \setminus \mathit{\Gamma}$.

[1]Начиная со второй итерации, вектор u не вычисляется по этой формуле, а пересчитывается (см. [1])

Если $\Delta[N] \leqslant \mathbb{O}$, то вектор u — план задачи, двойственной к задаче (1), и

$$c[N] \times x[N] = c[\varGamma] \times x[\varGamma] = \big(u[M] \times A[M,\varGamma]\big) \times x[\varGamma] = \\ = u[M] \times \big(A[M,N] \times x[N]\big) = u[M] \times b[M].$$

Отсюда следует, что x — оптимальный план задачи (1) (и u — оптимальный план двойственной задачи). Алгоритм завершает свою работу.

Допустим, что $\Delta[j] > 0$ при некотором $j \in N \setminus \varGamma$. Обозначаем

$$J = \{j \in N \setminus \varGamma \mid \Delta[j] > 0\}.$$

Выберем *наибольшее* $j = j_0$ из J и перейдём к следующему пункту.

2) **Определение направления убывания целевой функции.** Вычисляем коэффициенты разложения столбца $A[M, j_0]$ по базису $\varGamma$:

$$z[\varGamma] = B[\varGamma, M] \times A[M, j_0].$$

Если $z[\varGamma] \leqslant \mathbb{O}$, то решения нет (целевая функция не ограничена снизу на множестве планов). Алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к следующему пункту.

3) **Определение длины шага.** Вычисляем

$$t = \min\left\{ \frac{x[p]}{z[p]} \;\middle|\; p \in \varGamma,\;\; z[p] > 0 \right\}.$$

Через S обозначаем множество индексов, на которых достигается минимум. Выбираем *наибольшее* $s_0 \in S$.

4) **Пересчёт плана:**

$$\begin{aligned} x[p] &:= x[p] - t\, z[p],\ p \in \varGamma \setminus \{s_0\}, \\ x[j_0] &:= t, \\ x[q] &:= 0 \text{ для остальных } q \in N. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. (Будет использовано в Приложении В.)

> Значение целевой функции $f(x)$ на новом плане не больше, чем на прежнем: $f(x)$ станет меньше на величину $t\Delta[j_0] \geqslant 0$. Если $t = 0$, то из приведённых формул пересчёта плана следует, что *базисный план не изменится, хотя изменится базис*: равная нулю базисная компонента $x[s_0]$ заменяется компонентой $x[j_0]$, тоже нулевой.

5) **Смена базиса:** $\Gamma := \big(\Gamma \setminus \{s_0\}\big) \cup \{j_0\}$

Выбор *наибольших* индексов из J и S — это и есть правило Блэнда (см. Приложение В).

Приложение В
Зацикливание и правило Блэнда для его предотвращения

Симплекс-метод, решая задачу (1), строит последовательность базисов

$$\{\Gamma^{(k)}\},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Каждый базис $\Gamma^{(k)}$ однозначно определяет базисный план $x^{(k)}$. При этом $f(x^{(k+1)}) \leqslant f(x^{(k)})$. Различных базисов у матрицы $A[M, N]$ конечное число. Если гарантировать, что ни один базис не войдёт в (6) больше одного раза, то симплекс-метод завершится за конечное число итераций[2].

Если в последовательности (6) есть совпадающие базисы $\Gamma^{(k)} = \Gamma^{(l)} = \Gamma$, то последовательность базисов между двумя вхождениями Γ будет циклически повторяться снова и снова. Это явление называется *зацикливанием*[3].

Существует несколько разных способов устранения зацикливания. Остановимся на правиле Блэнда [5]:

> При определении индекса j_0, подлежащего включению в базис[4], и индекса s_0, подлежащего исключению из базиса[5], следует брать максимальные индексы
>
> $$j_0 = \max_{j \in J} j,$$
> $$s_0 = \max_{s \in S} s.$$

Сразу заметим, что в этой формулировке можно заменить слово «максимальные» словом «минимальные» и тоже получить верное правило[6].

[2]Такую гарантию можно дать лишь тогда, когда задача (1) невырожденная и целевая функция строго убывает от итерации к итерации. Между тем большинство практических задач линейного программирования являются вырожденными [4].

[3]Видимо, следует уточнить, что повторение не обязательно будет бесконечным, если в переход от $\Gamma^{(k)}$ к $\Gamma^{(k+1)}$ включён элемент случайности, так что базис, следующий за Γ, не каждый раз один и тот же. Внесение такой случайности — один из способов борьбы с зацикливанием, который здесь не обсуждается.

[4]п. 1) Приложения А.

[5]п. 3) Приложения А.

[6]Минимальные индексы берут чаще. Здесь предпочтение отдано максимальным, чтобы из базиса быстрее уходили искусственные переменные (у них как раз большие индексы).

ТЕОРЕМА. *Применение правила Блэнда на итерациях симплекс-метода предотвращает зацикливание.*

Доказательство. Допустим, что в (6) базисы $\Gamma^{(k)}$ и $\Gamma^{(l)}$ совпали при некоторых $k < l$, и назовём *циклом* подпоследовательность

$$C = \{\Gamma^{(i)}\},\ i = k, k+1, \ldots, l.$$

На итерации симплекс-метода базис меняется, так что цикл C содержит не меньше двух различных базисов.

Отметим, что при всяком переходе от одного базиса цикла C к другому, согласно замечанию к п. 4) Приложения А, базисный план x не меняется, меняется лишь роль двух его нулевых компонент: одна из базисной становится небазисной, другая — наоборот.

Индексы, вошедшие в базисы $\Gamma^{(i)}$ из C, можно разделить на *неподвижные*, входящие в каждый базис цикла, и *подвижные* — все остальные. Каждый подвижный индекс должен хотя бы по одному разу пройти и процедуру исключения из некоторого базиса цикла, и процедуру включения в некоторый базис цикла. Точнее, если подвижный индекс принадлежит начальному базису цикла $\Gamma^{(k)}$, то он, как подвижный, когда-то выйдет из базиса, но снова вернётся, по крайней мере, в $\Gamma^{(l)}$. Если подвижный индекс не был в начальном базисе, то когда-то он войдёт в текущий базис и когда-то выйдет, поскольку в $\Gamma^{(l)}$ его нет. Множества неподвижных и подвижных индексов обозначим соответственно K и F.

Так как каждый индекс $j \in F$ в цикле хоть раз оказывался небазисным, то и соответствующие компоненты $x[j]$ базисного плана x, повторяющегося в цикле C, все побывали небазисными, то есть они равны нулю:

$$x[F] = \mathbb{O}. \tag{7}$$

Найдём минимальный индекс из подвижных:

$$r = \min_{j \in F} j.$$

После этого из всех базисов цикла C выберем такие Γ' и Γ'', что $r \in \Gamma'$, $r \notin \Gamma''$, причём при переходе от Γ' к следующему базису индекс r должен покинуть базис, замещаясь на некоторый подвижный индекс $j_0 \notin \Gamma'$ с положительной оценкой $\Delta'[j_0]$, а при переходе от Γ'' к следующему базису индекс r, имея положительную оценку $\Delta''[r]$, должен войти в базис вместо какого-то индекса, обозначение которого нам не понадобится.

Положим $N' = \Gamma' \cap F$. Множество N' состоит из подвижных индексов базиса Γ'. Очевидно, что $r \in N'$ и что

$$\Gamma' \setminus N' = K. \tag{8}$$

Обратимся к п. 1) описания симплекс-метода (Приложение A). По условию индекс r включается в базис, следующий за $\mathit{\Gamma}''$, поэтому $\Delta''[r] > 0$. Покажем, что

$$\Delta''[j] \leqslant 0 \quad \text{при всех} \quad j \in F \setminus \{r\}. \tag{9}$$

Действительно, если допустить, что $\Delta''[j] > 0$ при некотором $j \in F \setminus \{r\}$, то по правилу Блэнда $j < r$. Вместе с тем $r < j$, поскольку $j \in F \setminus \{r\}$. Приходим к противоречию.

Из (9), в частности, следует, что $\Delta''[j_0] \leqslant 0$ и

$$\Delta''[j] \leqslant 0 \quad \text{при} \quad j \in N' \setminus \{r\}. \tag{10}$$

Неподвижные индексы входят в базис $\mathit{\Gamma}''$, поэтому $\Delta''[K] = \mathbb{O}$. Согласно (8),

$$\Delta''[\mathit{\Gamma}' \setminus N'] = \mathbb{O}. \tag{11}$$

Теперь обратимся к п. 3) описания симплекс-алгоритма. По условию индекс $r \in \mathit{\Gamma}'$ выходит из базиса, поэтому $z[r] > 0$, где

$$z[\mathit{\Gamma}'] = B[\mathit{\Gamma}', M] \times A[M, j_0].$$

Покажем, что

$$z[j] \leqslant 0 \quad \text{при} \quad j \in N' \setminus \{r\}. \tag{12}$$

Действительно, если допустить, что $z[j] > 0$ при некотором $j \in N' \setminus \{r\}$, то по правилу Блэнда $j < r$ (учесть, что, согласно (7), $x[j] = x[r] = 0$). Вместе с тем $r < j$, поскольку $j \in F \setminus \{r\}$. Приходим к противоречию.

В силу положительности величин $\Delta''[r]$, $z[r]$ и неравенств (10), (12) получаем

$$\Delta''[N'] \times z[N'] > 0. \tag{13}$$

Установим противоположное неравенство. Этим завершится доказательство теоремы.

Напомним, что

$$u'[M] = c[\mathit{\Gamma}'] \times B[\mathit{\Gamma}', M].$$

Согласно (11), имеем

$$\begin{aligned}
\Delta''[N'] \times z[N'] &= \Delta''[\mathit{\Gamma}'] \times z[\mathit{\Gamma}'] = \Delta''[\mathit{\Gamma}'] \times \big(B[\mathit{\Gamma}', M] \times A[M, j_0]\big) = \\
&= \big(u''[M] \times A[M, \mathit{\Gamma}'] - c[\mathit{\Gamma}']\big) \times B[\mathit{\Gamma}', M] \times A[M, j_0] + c[j_0] - c[j_0] = \\
&= u''[M] \times A[M, j_0] - c[j_0] - \big(u'[M] \times A[M, j_0] - c[j_0]\big) = \Delta''[j_0] - \Delta'[j_0].
\end{aligned}$$

Как отмечалось выше, $\Delta''[j_0] \leqslant 0$, $\Delta'[j_0] > 0$, поэтому

$$\Delta''[N'] \times z[N'] < 0.$$

Получили противоречие с (13). Теорема доказана. $\square$

Приложение C
Анализ задачи второго этапа

Рассмотрим множество (3), задающее ограничения задачи (4):

$$\Omega_* = \left\{ x[N \cup M^0] \;\middle|\; \begin{array}{c} A[M,N] \times x[N] - \mathcal{E}[M,M^0] \times x[M^0] = b[M], \\ x[N] \geqslant \mathbb{O}, \qquad x[M^0] \geqslant \mathbb{O} \end{array} \right\}.$$

ТЕОРЕМА. *Для любого вектора из Ω_* искусственная составляющая $x[M^0]$ равна нулю.*

Доказательство. Запишем задачу, двойственную задаче (2):

$$\begin{gathered} b[M] \times u[M] \to \max, \\ u[M] \times A[M,N] \leqslant \mathbb{O}[N], \\ u[M] \times \mathcal{E}[M,M'] \leqslant \mathbb{1}[M'], \end{gathered} \tag{14}$$

где $\mathbb{1}$ — вектор из одних единиц.

Возьмём произвольный вектор $x[N \cup M^0] \in \Omega_*$. Умножим обе части равенства в определении Ω_* слева на $u^0[M]$ — оптимальный план задачи (14). Получим

$$u^0[M] \times A[M,N] \times x[N] - u^0[M] \times \mathcal{E}[M,M^0] \times x[M^0] = u^0[M] \times b[M]. \tag{15}$$

Отметим, что:

- Из ограничений (14) следует, что $u^0[M] \times A[M,N] \times x[N] \leqslant 0$.
- Первые n коэффициентов целевой функции задачи (2) равны нулю, а все следующие — единице. Согласно (5), имеем $u^0[M] = \sum\limits_{j \in M^0} B^0[j,M]$, где $B^0[\varGamma^0, M]$ — обратная базисная матрица. Поскольку все столбцы матрицы $\mathcal{E}[M,M^0]$ базисные, то
$$u^0[M] \times \mathcal{E}[M,M^0] = \sum_{j \in M^0} B^0[j,M] \times \mathcal{E}[M,M^0] = \mathbb{1}[M^0].$$
- Ко второму этапу алгоритм переходит только в том случае, когда оптимальное значение целевой функции задачи (2) равно нулю. По теореме двойственности правая часть (15) также будет равняться нулю.

С учётом отмеченного, на основании (15) получаем $\sum\limits_{i \in M^0} x[i] \leqslant 0$. Но $x[M^0] \geqslant \mathbb{O}$, значит $x[M^0] = \mathbb{O}$. □

Из доказанного утверждения следует, что искусственные составляющие всех планов задачи (4) нулевые, так что, решая её, мы получаем и решение задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Модифицированный симплекс-метод* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 20 ноября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1120`)

2. Карманов В. Г. *Математическое программирование*. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

3. Булавский В. А. *Замечание о начале счёта в линейном программировании* / Сб. «Оптимальное планирование», № 15. Новосибирск, 1970. С. 76–78.

4. Dantzig G. B., Thapa M. N. *Linear Programming 2: Theory and Extensions.* Springer-Verlag, 2003.

5. Bland R. G. *New Finite Pivoting Methods for the Simplex Method* // Mathematics of Operations Research. 1977. Vol. 2. No. 2. P. 103–107.