САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Макаров Антон Александрович

НЕКОТОРЫЕ СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2007

Работа выполнена на кафедре параллельных алгоритмов математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Демьянович Юрий Казимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Малоземов Василий Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор Репин Сергей Игоревич.

Ведущая организация: Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (НИВЦ МГУ)

Защита состоится "___" _____________ 2007 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___" _____________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Мартыненко Б. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Теория вэйвлетов (всплесков) появилась несколько десятилетий назад и имеет значимое приложение к решению практических задач в различных областях науки: математике, физике, медицине, инженерном деле. Развитие теории осуществляли многие ученые: И. Мейер, С. Малла, И. Добеши, Г. Стрэнг, Ж. Баттле, П. Ж. Лемарье, Ч. Чуи, А. Коэн, Р. Койфман, С. Б. Стечкин, В. А. Рвачев, И. Я. Новиков, М. А. Скопина, А. П. Петухов, В. Н. Малоземов, В. А. Желудев, В. Ю. Протасов и др.

Вэйвлеты широко применяются при составлении эффективных алгоритмов обработки больших потоков информации или цифровых сигналов. Роль теории вэйвлетов заключается в предоставлении предметному специалисту достаточно широкого набора средств, из которых он может выбрать именно то средство, которое ему подходит для обработки (для разложения на составляющие) интересующего его потока информации (цифрового сигнала). В теории вэйвлетов упомянутыми средствами являются наборы вложенных пространств функций и их представлений в виде прямой (а иногда и ортогональной) суммы вэйвлетных пространств.

Многие типы известных вэйвлетов обеспечивают быстрое, но весьма неточное сжатие. В данной работе используются сплайн-вэйвлетные системы с гарантированно высокой точностью приближения гладких цифровых потоков. Они приводят к эффективному сжатию и к достаточно точному результату, ибо учитывают "гладкость" обрабатываемого потока цифровой информации. Стимулом к изучению этого направления исследований стали работы С. Г. Михлина и Ю. К. Демьяновича, поскольку исходными здесь являются аппроксимационные соотношения.

В случае, когда $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$, а сетка – равномерная, удается применить мощный аппарат гармонического анализа (в пространстве функций $L^2(\mathbb{R}^1)$ и пространстве последовательностей l^2). Этому случаю посвящено большое количество исследований. При обработке цифровых потоков с резко меняющимися характеристиками (со сменой плавного поведения на скачкообразное и наоборот) целесообразно использовать неравномерную сетку, приспосабливаемую к обрабатываемому потоку. Применение неравномерной сетки позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений. Более того, для улучшения приближения могут понадобиться различные степени измельчения сетки в разных частях рассматриваемого промежутка.

Цель диссертационной работы

Целью работы является получение новых аппроксимирующих пространств с локальным базисом; построение минимальных сплайнов с компактным носителем на неравномерной сетке и исследование их свойств; нахождение цепочек вложенных пространств для последовательности измельчающихся сеток; представление упомянутых цепочек в виде прямой суммы вэйвлетных пространств с локальным базисом; построение новых сплайн-вэйвлетных разложений; построение приближения полученными минимальными сплайнами; получение представления остатка приближения; составление алгоритмов моделирования сплайн-вэйвлетной аппроксимации, алгоритмов декомпозиции и реконструкции (в том числе параллельных); численная апробация полученных результатов на модельных примерах.

Методы исследования

В диссертации используются методы линейной алгебры и теории функций вещественного переменного. Для построения базисов минимальных сплайнов применен метод аппроксимационных соотношений.

Достоверность и обоснованность

Достоверность результатов подтверждена строгими доказательствами; результаты согласуются с проведенными численными экспериментами.

Результаты, выносимые на защиту

1. Получены новые аппроксимирующие пространства с локальным базисом – пространства B_φ-сплайнов. Исследованы свойства B_φ-сплайнов третьего порядка с минимальным компактным носителем, построенных на неравномерной сетке. Получены формулы для вычисления базисных сплайнов. Представлены результаты моделирования полиномиальных и неполиномиальных B_φ-сплайнов.

2. Для построенных сплайнов установлены соотношения, которые дают представление координатных сплайнов на исходной сетке в виде линейной комбинации координатных сплайнов на сетке, полученной измельчением исходной. Для последовательности измельчающихся сеток получены цепочки вложенных пространств.

3. Дано представление цепочек вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств с локальным базисом. Получены соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции. Даны способы распараллеливания упомянутых формул. Представлены результаты применения алгоритмов декомпозиции и реконструкции к сжатию и восстановлению модельных числовых потоков.

4. Для функции из пространства C^4 построена аппроксимация в виде линейной комбинации базисных сплайнов, коэффициентами которой являются значения аппроксимационных функционалов. Дано представление остатка приближения. Найдены асимптотические оценки для аппроксимационных функционалов и B_φ-сплайнов. Рассмотрены оценки погрешности аппроксимации B_φ-сплайнами, в том числе и оценки, обладающие свойством точности на компонентах вектор-функции φ.

5. Доказан ряд алгебраических тождеств, связанных с построением B_φ-сплайнов второго порядка. Исследованы свойства B_φ-сплайнов второго и третьего порядков.

6. Промоделирована аппроксимируемая функция из пространства C^4 в виде линейной комбинации образующих сплайнов (тригонометрических), коэффициентами которой служат значения аппроксимационных функционалов на упомянутой функции. Даны результаты приближения в случае сплайн-вэйвлетной модели аппроксимации.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая полезность

Работа носит теоретический характер, а также представляет практический интерес. Полученные результаты могут быть применены для создания высокоэффективных алгоритмов решения различных прикладных задач при сжатии и последующем восстановлении с заданной точностью больших потоков информации (цифровых сигналов) с резко меняющимися характеристиками, изображений. Результаты могут быть использованы при решении задач интерполяции и аппроксимации вещественных функций одной и многих переменных, при численном решении ряда задач математической физики, а также при построении параллельных форм алгоритмов упомянутых задач.

Апробация работы

Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

1. Процессы управления и устойчивость. XXXVII международная научная конференция аспирантов и студентов, С.-Петербург, Россия, 10–13 апреля 2006 г.

2. Высокопроизводительные вычисления на кластерных системах. 6й международный научно-практический семинар, С.-Петербург, Россия, 12–16 декабря, 2006 г.

3. 12th International Conference in Approximation Theory. San Antonio, Texas, USA, March 4–8, 2007.

4. Процессы управления и устойчивость. XXXVIII международная научная конференция аспирантов и студентов, С.-Петербург, Россия, 9–12 апреля 2007 г.

5. Нелинейный динамический анализ – 2007. Международный конгресс, С.-Петербург, Россия, 4–8 июня, 2007 г.

6. Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ–2007, Академгородок, Новосибирск, Россия, 18–20 июня 2007 г.

7. Leonhard Euler Congress. Third International Workshop on Reliable Methods of Mathematical Modeling, St. Petersburg, Russia, July 24–27, 2007.

8. Семинар кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Публикации

Основные результаты опубликованы в 11 работах (см. раздел "Список опубликованных работ по теме диссертации" в конце автореферата).

Структура и объем работы

Диссертация объемом 178 страниц состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, а также 5 таблиц и 29 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы и излагаются основные результаты исследования.

В **первой главе** рассматриваются обобщенные сплайны третьего порядка, имеющие минимальный носитель.

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел. Будем использовать четырехмерное векторное пространство $\mathbb{R}^4$, причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ выражение $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов, то есть $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sum_{s=0}^{3}[\mathbf{a}]_s[\mathbf{b}]_s$, где в квадратных скобках – компоненты векторов. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{d}$ $\in \mathbb{R}^4$ (в указанном только что порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$, а выражение $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ означает ее определитель.

Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^4$ будем называть *цепочкой* векторов. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если матрица $A_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\mathbf{a}_{j-3}, \mathbf{a}_{j-2},\ \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\Big)$ является неособенной матрицей при любом $j \in \mathbb{Z}$. Совокупность всех полных цепочек будем обозначать $\mathbb{A}$.

На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X:\ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots;\ \text{пусть}\ \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to-\infty} x_j,\ \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to+\infty} x_j. \qquad (1)$$

Введем обозначения $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}\ (x_j, x_{j+1}),\ S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+4}],\ J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-3, k-2, k-1, k\},\ k, j \in \mathbb{Z}$.

При $K_0 \geq 1$, $K_0 \in \mathbb{R}^1$ обозначим $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности* $K_0^{-1} \leq (x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})^{-1} \leq K_0$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ и положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}\ (x_{j+1} - x_j)$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Для любого неотрицательного целого числа S пусть $C^S(\alpha, \beta)$ — линейное пространство функций, непрерывных вместе со всеми производными до порядка S во внутренних точках интервала (α, β). Также нам потребуется обычно используемое нормированное пространство $C^S[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^4$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Если $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$, то функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, однозначно определяются из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z}; \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin S_j \cap M. \qquad (2)$$

Из соотношения (2) ясно, что $\operatorname{supp}\,\omega_j \subset S_j$.

В линейном пространстве $\mathbb{X}(M)$ содержится линейное пространство

$$\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\omega_j(t) \quad \forall t \in M, \ \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\},$$

называемое *пространством минимальных* $(X, \mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов* (третьего порядка); функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$ называются *образующими* пространства $\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)}$. Функция φ называется *порождающей* для сплайнов ω_j, а цепочка векторов $\mathbf{A}$ — *определяющей* для этих сплайнов.

В дальнейшем для вектор-функции $\varphi \in C^S(\alpha, \beta)$ положим

$$\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j), \qquad \varphi_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(i)}(x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, S, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

При $\varphi \in C^2(\alpha, \beta)$ рассмотрим последовательность векторов $\mathbf{D}_{X,\,\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{d}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, где векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^4$ задаются тождеством

$$\mathbf{d}_j^T\mathbf{x} \equiv \det(\varphi_j, \varphi\,'_j, \varphi\,''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1 . *Пусть* $\varphi \in C^{\,2}(\alpha, \beta)$, *и* $\mathbf{D}_{X,\,\varphi} \in \mathbb{A}$. *Тогда при достаточно малом* h_X *во множестве* $\{\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\,\varphi)} \mid \mathbf{A} \in \mathbb{A}\}$ *существует единственное пространство сплайнов, продолжимых до функций пространства* $C^{\,2}(\alpha, \beta)$.

При выполнении условий теоремы 1 пространство $\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)}$, содержащееся в $C^{\,2}(\alpha, \beta)$, будем называть *пространством минимальных* $B_{\,\varphi}$*-сплайнов* (третьего порядка) и обозначать $\mathcal{B}_{\varphi}(X)$.

Рассмотрим произвольные векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}''$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}'$, $\mathbf{z}''$ из пространства $\mathbb{R}^4$ и полилинейную вектор-функцию $\mathbf{a}^*$, задаваемую символическим определителем

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'') \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x}' & \mathbf{x}'' \\ \det(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{x}) & \det(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{x}') & \det(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{x}'') \\ \det(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'', \mathbf{x}) & \det(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'', \mathbf{x}') & \det(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'', \mathbf{x}'') \end{pmatrix}.$$

С помощью функции $\mathbf{a}^*$ введем векторы $\mathbf{a}_j^*$ по формуле

$$\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^*(\varphi_{j+1}, \varphi\,'_{j+1}, \varphi\,''_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi\,'_{j+2}, \varphi\,''_{j+2}, \varphi_{j+3}, \varphi\,'_{j+3}, \varphi\,''_{j+3}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

При $\varphi(t) \in C^3(\alpha, \beta)$ рассмотрим вронскиан $W(t) = \det(\varphi, \varphi\,', \varphi\,'', \varphi\,''')(t)$.

Теорема 2 . *Если* $\varphi \in C^{\,4}[\alpha, \beta]$, $W(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$, *и* $X \in \mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ *для некоторого* $K_0 \geq 1$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что при* $h_X < \varepsilon$ *линейная оболочка функций* ω_j^*, $j \in \mathbb{Z}$, *полученных по формулам (2) при* $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_j^*$, *совпадает с пространством* $\mathcal{B}_{\varphi}(X)$.

Заметим, что при сделанных в теореме 2 предположениях, цепочка $\mathbf{a}_j^*$ является полной.

Теорема 3 . *Если цепочка векторов* $\mathbf{a}_j^*$ *полная, то функции* $\omega_j^*(t)$ *дважды непрерывно дифференцируемы на интервале* (α,β), *и справедливы формулы*

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T\mathbf{a}_j^*} \qquad \textit{при} \quad t\in[x_j,x_{j+1}), \tag{3}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T\mathbf{a}_j^*} - \frac{\mathbf{d}_j^T\mathbf{a}_{j+1}^*}{\mathbf{d}_j^T\mathbf{a}_j^*}\cdot\frac{\mathbf{d}_{j+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T\mathbf{a}_{j+1}^*} \qquad \textit{при} \quad t\in[x_{j+1},x_{j+2}), \tag{4}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+4}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+4}^T\mathbf{a}_j^*} - \frac{\mathbf{d}_{j+4}^T\mathbf{a}_{j-1}^*}{\mathbf{d}_{j+4}^T\mathbf{a}_j^*}\cdot\frac{\mathbf{d}_{j+3}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T\mathbf{a}_{j-1}^*} \quad \textit{при}\, t\in[x_{j+2},x_{j+3}), \tag{5}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+4}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+4}^T\mathbf{a}_j^*} \qquad \textit{при} \quad t\in[x_{j+3},x_{j+4}]. \tag{6}$$

Во **второй главе** рассматривается измельчение исходной сетки. Она посвящена калибровочным соотношениям и вложенности пространств B_φ-сплайнов в этом случае. Выясняется, что упомянутые соотношения связаны с некоторыми алгебраическими тождествами, которые, по-видимому, представляют самостоятельный интерес. Для сетки $\overline{X}\in\mathcal{X}(K_0,\alpha,\beta)$, полученной из сетки X добавлением одного узла, описанным выше способом строятся B_φ-сплайны $\overline{\omega}_i^*$. Устанавливаются калибровочные соотношения (обобщающие кратно-масштабное уравнение), выражающие построенные ранее B_φ-сплайны ω_j^* (для сетки X) в виде линейной комбинации сплайнов $\overline{\omega}_i^*$. Последовательное добавление узлов позволяет рассмотреть любую пару сеток $X\subset\overline{X}$, где $X,\overline{X}\in\mathcal{X}(K_0,\alpha,\beta)$, и утверждать, что $\mathcal{B}_\varphi(X)\subset\mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$.

В этой главе исходная сетка X дополняется новым узлом ξ, и на полученной таким образом сетке $\overline{X}$ рассматриваются B_φ-сплайны $\overline{\omega}_{j'}^*(t)$. Итак, пусть ξ — упомянутый новый узел, $\xi\in(x_k,x_{k+1})$, а $\overline{x}_j$ — узлы вновь полученной сетки:

$$\overline{x}_j \overset{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j\le k, \quad \overline{x}_{k+1}\overset{\text{def}}{=}\xi, \quad \overline{x}_j\overset{\text{def}}{=}x_{j-1} \text{ при } j\ge k+2, \quad \overline{X}\overset{\text{def}}{=}\{\overline{x}_j\mid j\in\mathbb{Z}\}. \tag{7}$$

Функции ω_j^* зависят от узлов $x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3},x_{j+4}$, так что нетрудно указать функцию шести вещественных переменных $\omega(u,v,w,y,z,t)$ (см. формулы (3) – (6)) такую, что

$$\omega_j^*(t)=\omega(x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3},x_{j+4},t) \qquad \forall j\in\mathbb{Z}.$$

На новой сетке рассмотрим функции

$$\overline{\omega}_j^*(t)\overset{\text{def}}{=}\omega(\overline{x}_j,\overline{x}_{j+1},\overline{x}_{j+2},\overline{x}_{j+3},\overline{x}_{j+4},t).$$

Условимся надчеркивать обозначения всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\overline{X}$, в частности, положим

$$\overline{\varphi}_j\overset{\text{def}}{=}\varphi(\overline{x}_j), \quad \overline{\varphi}\,'_j\overset{\text{def}}{=}\varphi\,'(\overline{x}_j), \quad \overline{\varphi}\,''_j\overset{\text{def}}{=}\varphi\,''(\overline{x}_j),$$

$$\overline{\mathbf{a}}_j^*\overset{\text{def}}{=}\mathbf{a}^*(\overline{\varphi}_{j+1},\overline{\varphi}\,'_{j+1},\overline{\varphi}\,''_{j+1},\overline{\varphi}_{j+2},\overline{\varphi}\,'_{j+2},\overline{\varphi}\,''_{j+2},\overline{\varphi}_{j+3},\overline{\varphi}\,'_{j+3},\overline{\varphi}\,''_{j+3}),$$

$$\overline{\mathbf{d}}_j^T\mathbf{x}\overset{\text{def}}{=}\det(\overline{\varphi}_j,\overline{\varphi}\,'_j,\overline{\varphi}\,''_j,\mathbf{x}), \quad \text{где } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4.$$

Для $\overline{\omega}_j^*(t)$ справедливы формулы (3) – (6), если в последних сделать очевидные замены. Таким образом,

$$\overline{\omega}_j^*(t) = \frac{\overline{\mathbf{d}}_j^T\varphi(t)}{\overline{\mathbf{d}}_j^T\overline{\mathbf{a}}_j^*} \qquad \text{при} \quad t \in [\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}),$$

$$\overline{\omega}_j^*(t) = \frac{\overline{\mathbf{d}}_j^T\varphi(t)}{\overline{\mathbf{d}}_j^T\overline{\mathbf{a}}_j^*} - \frac{\overline{\mathbf{d}}_j^T\overline{\mathbf{a}}_{j+1}^*}{\overline{\mathbf{d}}_j^T\overline{\mathbf{a}}_j^*} \cdot \frac{\overline{\mathbf{d}}_{j+1}^T\varphi(t)}{\overline{\mathbf{d}}_{j+1}^T\overline{\mathbf{a}}_{j+1}^*} \qquad \text{при} \quad t \in [\overline{x}_{j+1}, \overline{x}_{j+2}),$$

$$\overline{\omega}_j^*(t) = \frac{\overline{\mathbf{d}}_{j+4}^T\varphi(t)}{\overline{\mathbf{d}}_{j+4}^T\overline{\mathbf{a}}_j^*} - \frac{\overline{\mathbf{d}}_{j+4}^T\overline{\mathbf{a}}_{j-1}^*}{\overline{\mathbf{d}}_{j+4}^T\overline{\mathbf{a}}_j^*} \cdot \frac{\overline{\mathbf{d}}_{j+3}^T\varphi(t)}{\overline{\mathbf{d}}_{j+3}^T\overline{\mathbf{a}}_{j-1}^*} \quad \text{при } t \in [\overline{x}_{j+2}, \overline{x}_{j+3}),$$

$$\overline{\omega}_j^*(t) = \frac{\overline{\mathbf{d}}_{j+4}^T\varphi(t)}{\overline{\mathbf{d}}_{j+4}^T\overline{\mathbf{a}}_j^*} \qquad \text{при} \quad t \in [\overline{x}_{j+3}, \overline{x}_{j+4}].$$

Теорема 4 . *Для $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\omega_j^*(t) \equiv \overline{\omega}_j^*(t) \ \textit{при} \ j \le k-4, \tag{8}$$

$$\omega_j^*(t) \equiv \overline{\omega}_{j+1}^*(t) \ \textit{при} \ j \ge k+1, \tag{9}$$

$$\omega_{k-3}^*(t) \equiv \overline{\omega}_{k-3}^*(t) + \mathfrak{p}_{k-3,k-2}\overline{\omega}_{k-2}^*(t), \tag{10}$$

$$\omega_{k-2}^*(t) \equiv \mathfrak{p}_{k-2,k-2}\overline{\omega}_{k-2}^*(t) + \mathfrak{p}_{k-2,k-1}\overline{\omega}_{k-1}^*(t), \tag{11}$$

$$\omega_{k-1}^*(t) \equiv \mathfrak{p}_{k-1,k-1}\overline{\omega}_{k-1}^*(t) + \mathfrak{p}_{k-1,k}\overline{\omega}_k^*(t), \tag{12}$$

$$\omega_k^*(t) \equiv \mathfrak{p}_{k,k}\overline{\omega}_k^*(t) + \overline{\omega}_{k+1}^*(t), \tag{13}$$

где

$$\mathfrak{p}_{k-3,k-2} = \overline{\mathbf{d}}_{k+2}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-2}^*/\overline{\mathbf{d}}_{k+2}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-3}^*, \tag{14}$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = \left(\overline{\mathbf{d}}_{k+3}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-2}^* - \overline{\mathbf{d}}_{k+3}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-3}^*\frac{\overline{\mathbf{d}}_{k+2}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-2}^*}{\overline{\mathbf{d}}_{k+2}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-3}^*}\right)/\overline{\mathbf{d}}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k-2}^*, \tag{15}$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-1} = \overline{\mathbf{d}}_{k+3}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-1}^*/\overline{\mathbf{d}}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k-2}^*, \tag{16}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{a}}_{k-1}^*/\overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^*, \tag{17}$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k} = \left(\overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{a}}_k^* - \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*\frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T\overline{\mathbf{a}}_k^*}{\overline{\mathbf{d}}_k^T\overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*}\right)/\overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^*, \tag{18}$$

$$\mathfrak{p}_{k,k} = \overline{\mathbf{d}}_k^T\overline{\mathbf{a}}_k^*/\overline{\mathbf{d}}_k^T\overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*. \tag{19}$$

Дадим другой вариант формулировки теоремы 4. Введем бесконечномерные вектор-столбцы, компонентами которых являются функции $\omega_j^*(t)$ и $\overline{\omega}_j^*(t)$:

$$\omega^*(t) = (\ldots, \omega_{-2}^*(t), \omega_{-1}^*(t), \omega_0^*(t), \omega_1^*(t), \omega_2^*(t), \ldots)^T,$$

$$\overline{\omega}^*(t) = (\ldots, \overline{\omega}_{-2}^*(t), \overline{\omega}_{-1}^*(t), \overline{\omega}_0^*(t), \overline{\omega}_1^*(t), \overline{\omega}_2^*(t), \ldots)^T.$$

Теорема 5 . *Справедливо соотношение*

$$\omega^*(t) = \mathfrak{P}\,\overline{\omega}^*(t),$$

где $\mathfrak{P}$ *– бесконечная матрица вида* $\mathfrak{P} \stackrel{\rm def}{=} (\mathfrak{p}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$*, элементы которой задаются равенствами*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \le k-4, \qquad \mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \quad \textit{при} \quad i \ge k+1,$$

$$\mathfrak{p}_{k-3,j} = \delta_{k-3,j} \quad \textit{при} \quad j \ne k-2, \quad \mathfrak{p}_{k-2,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k-2, k-1\},$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k-1, k\}, \qquad \mathfrak{p}_{k,j} = \delta_{k+1,j} \quad \textit{при} \quad j \ne k.$$

а также формулами (14) – (19).

Третья глава посвящена вэйвлетным разложениям. Построена система функционалов $\{g^{(j)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ биортогональная системе $\{\omega^*_{j'}(t)\}_{j'\in\mathbb{Z}}$ и система функционалов $\{\overline{g}^{(j)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ биортогональная системе $\{\overline{\omega}^*_{j'}(t)\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, т.е.

$$\langle g^{(j)}, \omega^*_{j'}\rangle = \delta_{j,j'},\ \langle \overline{g}^{(j)},\ \overline{\omega}^*_{j'}\rangle = \delta_{j,j'},\ \text{где } j, j' \in \mathbb{Z}.$$

В соответствии с определением $\mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$ является пространством B_φ-сплайнов третьего порядка на сетке $\overline{X}$ (см. соотношения (7)),

$$\mathcal{B}_\varphi(\overline{X}) = \{\ \widetilde{u} \mid \widetilde{u} \stackrel{\rm def}{=} \sum_j c_j\, \overline{\omega}^*_j \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\ \}.$$

Согласно калибровочным соотношениям (8) – (13) справедливо включение $\mathcal{B}_\varphi(X) \subset \mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$. Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$ на подпространство $\mathcal{B}_\varphi(X)$, задаваемый формулой $P\widetilde{u} \stackrel{\rm def}{=} \sum_j a_j\, \omega^*_j, a_j = \langle g^{(j)}, \widetilde{u}\rangle$ для всех $\widetilde{u} \in \mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$, и введем оператор $Q = I - P$, где I — тождественный оператор. Пусть далее $\mathfrak{q}_{i,j} \stackrel{\rm def}{=} \langle g^{(i)}, \overline{\omega}^*_j\rangle,\ i, j \in \mathbb{Z}$.

Пространство $W \stackrel{\rm def}{=} Q\mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)*, а прямое разложение

$$\mathcal{B}_\varphi(\overline{X}) = \mathcal{B}_\varphi(X) \dot{+} W, \tag{20}$$

называется *сплайн-вэйвлетным разложением* пространства $\mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$.

Согласно формуле (20) имеем $\widetilde{u} = \sum_i a_i\omega^*_i + \sum_{i'} b_{i'}\overline{\omega}^*_{i'} = \sum_{i'}(\sum_i a_i\mathfrak{p}_{i,i'} + b_{i'})\overline{\omega}^*_{i'}$, так что для чисел $c_j = \langle \overline{g}^{(j)}, \widetilde{u}\rangle$ получаем

$$c_j = \sum_i a_i\mathfrak{p}_{i,j} + b_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть известны коэффициенты c_j в разложении элемента $\widetilde{u} \in \mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$ по элементам базиса $\overline{\omega}^*_j$. Тогда верны формулы

$$a_i = \sum_{i'} \mathfrak{q}_{\,i,i'}c_{i'}, \tag{21}$$

$$b_j = c_j - \sum_{i'}\Big(\sum_i \mathfrak{p}_{i,j}\mathfrak{q}_{i,i'}\Big)c_{i'}, \tag{22}$$

называемые *формулами декомпозиции.*

Теорема 6 . *Для сплайн-вэйвлетного разложения (20) пространства $\mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$ формулы декомпозиции (21) – (22) имеют вид*

$$a_i = c_i \quad \textit{при} \quad i \le k-3, \qquad a_i = c_{i+1} \quad \textit{при} \quad i \ge k,$$

$$a_{k-2} = \mathfrak{q}_{k-2,k-3}\, c_{k-3} + \mathfrak{q}_{k-2,k-2}\, c_{k-2},$$
$$a_{k-1} = \mathfrak{q}_{k-1,k-3}\, c_{k-3} + \mathfrak{q}_{k-1,k-2}\, c_{k-2} + \mathfrak{q}_{k-1,k-1}\, c_{k-1},$$
$$b_j = 0 \quad \textit{при} \;\; j \ne k, \tag{23}$$
$$b_k = c_k - \mathfrak{p}_{k-1,k}(\mathfrak{q}_{k-1,k-3}c_{k-3} + \mathfrak{q}_{k-1,k-2}c_{k-2} +$$
$$+ \mathfrak{q}_{k-1,k-1}c_{k-1}) - \mathfrak{p}_{k,k}c_{k+1}. \tag{24}$$

Следствие 1 . *Согласно формулам (23) – (24) вэйвлетным базисом пространства W служит B_φ-сплайн $\overline{\omega}^*_k$, т.е. $W = \{b\,\overline{\omega}^*_k \mid b \in \mathbb{R}^1\}$.*

Пусть теперь известны коэффициенты a_i и b в разложениях проекций элемента $\widetilde{u} \in \mathcal{B}_\varphi(\overline{X})$ на пространства $\mathcal{B}_\varphi(X)$ и W: $P\widetilde{u} = \sum_i a_i\omega^*_i$, $Q\widetilde{u} = b\,\overline{\omega}^*_k$. Найдем формулы для определения коэффициентов c_j для представления элемента $\widetilde{u}$ в виде суммы $\widetilde{u} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\overline{\omega}^*_j$; эти формулы называются *формулами реконструкции.*

Теорема 7 . *Для рассматриваемого сплайн-вэйвлетного разложения (20) формулы реконструкции имеют вид*

$$c_i = a_i \quad \textit{при} \quad i \le k-3, \qquad c_i = a_{i-1} \quad \textit{при} \quad i \ge k+1,$$

$$c_{k-2} = \mathfrak{p}_{k-3,k-2}a_{k-3} + \mathfrak{p}_{k-2,k-2}a_{k-2},$$
$$c_{k-1} = \mathfrak{p}_{k-2,k-1}a_{k-2} + \mathfrak{p}_{k-1,k-1}a_{k-1},$$
$$c_k = b_k + \mathfrak{p}_{k-1,k}a_{k-1} + \mathfrak{p}_{k,k}a_k.$$

В этой главе также даны решения соответствующих интерполяционных задач в пространствах B_φ-сплайнов. Для последовательности вложенных сеток рассмотрены варианты систем вложенных пространств B_φ-сплайнов (телескопические системы), для которых получено разложение в прямую сумму вэйвлетных пространств. Заметим, что базисные функции последних имеют компактные носители, занимающие четыре сеточных промежутка. Рассмотрен вопрос о распараллеливании вэйвлетных разложений. Приведены параллельные формы для вычисления формул декомпозиции и реконструкции.

В **четвертой главе** для функции из пространства C^4 строится аппроксимация в виде линейной комбинации базисных сплайнов, коэффициентами которой являются значения аппроксимационных функционалов. Выводятся асимптотические оценки для аппроксимационных функционалов и B_φ-сплайнов. С помощью обобщенной формулы Тейлора получается оценка аппроксимации порядка h^4_X, точная на компонентах вектор-функции φ.

В **пятой главе** рассматривается другой подход к построению B_φ-сплайнов второго порядка. Доказан ряд алгебраических тождеств. Сформулируем одно из них.

Теорема 8 . *Для произвольных векторов* **P**, **Q**, **R**, **S**, **T** *из* $\mathbb{R}^3$ *справедлива формула*

$$\det(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R})\det(\mathbf{R},\mathbf{S},\mathbf{T})+\det(\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{S})\det(\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{T})=$$
$$=\det(\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{T})\det(\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{S}).$$

В этой главе также исследованы свойства B_φ-сплайнов второго и третьего порядков.

Шестая глава посвящена моделированию полиномиальных и неполиномиальных B_φ-сплайнов (при $\varphi(t)\stackrel{\text{def}}{=}(1,t,t^2,t^3)^T$ и $\varphi(t)\stackrel{\text{def}}{=}(1,\sin t,\cos t,\sin 2t)^T$ соответственно). Получены формулы для вычисления базисных сплайнов. Проиллюстрирована вложенность пространств при одном варианте измельчения сетки и конкретизированы калибровочные соотношения в данной ситуации. Далее моделируется аппроксимируемая функция из пространства C^4 в виде линейной комбинации образующих сплайнов (тригонометрических), коэффициентами которой служат значения аппроксимационных функционалов на упомянутой функции. Даны результаты приближения в случае сплайн-вэйвлетной модели аппроксимации. Приведены результаты применения алгоритмов декомпозиции и реконструкции к сжатию и восстановлению модельных числовых потоков.

В **заключении** перечислены основные результаты исследования.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] **Макаров А. А.** Об алгебраических тождествах в теории B_φ-сплайнов // Процессы управления и устойчивость: Тр. 37-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб., 10–13 апреля 2006г. / Под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. С. 164–166.

[2] **Демьянович Ю. К., Макаров А. А.** Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Проблемы математического анализа. Вып. 34. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2006. С. 39–54.

[3] **Макаров А. А.** Новые методы сжатия информации // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах. Материалы шестого Международного научно-практического семинара. Том 2. / Под ред. проф. Р. Г. Стронгина. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. С. 32–34.

[4] **Макаров А. А.** Об одном алгебраическом тождестве в теории B_φ-сплайнов второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 1. С. 96–98.

[5] **Demjanovich Yu. K., Kosogorov O. M., Makarov A. A.** Wavelet Decomposition for Adaptive Irregular Grids // Twelfth International Conference in Approximation Theory. San Antonio, Texas, USA. March 4–8, 2007. Abstracts, p. 36.

[6] **Demy'anovich Yu. K., Makarov A. A.** Calibration relations for nonpolynomial splines // Journal of Mathematical Sciences (New York), Vol. 142, No. 1, 2007. P. 1769–1787.

[7] **Макаров А. А.** Вложенность пространств B_φ-сплайнов третьего порядка и вэйвлетные разложения // Процессы управления и устойчивость: Тр. 38-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов. СПб., 9–12 апреля 2007 г. / Под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. С. 171–174.

[8] **Демьянович Ю. К., Макаров А. А.** Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов лагранжева типа // Нелинейный динамический анализ–2007: Тезисы докладов международного конгресса, Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. С. 273.

[9] **Демьянович Ю. К., Макаров А. А.** Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ–2007: Тезисы докладов, Академгородок, Новосибирск, Россия, 18–20 июня 2007 г.
http://www-sbras.nsc.ru/ws/show_abstract.dhtml?ru+164+11935

[10] **Demjanovich Yu. K., Makarov A. A.** System of Embedded Spaces for Non-polynomial Splines // Third International Workshop on Reliable Methods of Mathematical Modeling, St. Petersburg, Russia, July 24–27, 2007. Abstracts, p. 11.

[11] **Демьянович Ю. К., Макаров А. А.** Система вложенных пространств неполиномиальных сплайнов // Питання оптимизації обчислень (ПОО – XXXIII): Праці міжнародного симпозіуму, смт. Кацивелі, Велика Ялта, Крим, Україна, 23–28 вересня 2007 р. – Київ: Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова, 2007. С. 92.

В совместных работах [2, 5, 6, 8–11] научному руководителю принадлежит общая постановка задач и указание на идею исследования, а детальная реализация идеи полностью принадлежит диссертанту.