ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

10 ноября 2012 г.

1°. Рассмотрим линейную дискретную задачу оптимального управления [1, с. 152—157]:

$$\sum_{k=1}^{s+1}\langle c_k, x_k\rangle + \sum_{k=0}^{s}\langle b_k, u_k\rangle \to \sup, \tag{1}$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, s; \tag{2}$$

$$D_k u_k \leqslant d_k, \quad k = 0, 1, \ldots, s; \tag{3}$$

$$x_0 = \hat{x}. \tag{4}$$

Здесь A_k, B_k, D_k — матрицы с описанием

$$A_k = A_k[N, N], \quad B_k = B_k[N, M], \quad D_k = D_k[L, M].$$

Вектор $x_k = x_k[N]$ характеризует положение некоторой системы в момент времени k. С помощью вектора $u_k = u_k[M]$ осуществляется управляющее воздействие на систему. Этот вектор должен удовлетворять ограничениям (3). Траектория системы $\{x_0, x_1, \ldots, x_{s+1}\}$ однозначно определяется рекуррентным соотношением (2) и начальным условием (4) — после выбора последовательности управлений $\{u_k\}_{k=0}^{s}$.

Целевую функцию задачи (1) можно интерпретировать как оценку «качества» траектории (с учетом «цены» управления). Требуется выбрать последовательность управлений так, чтобы соответствующая траектория имела наивысшую оценку «качества».

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Задача (1)–(4) является задачей линейного программирования относительно блочного вектора неизвестных

$$(u_0,\, x_1,\, u_1,\, x_2,\, u_2,\, \ldots,\, x_s,\, u_s,\, x_{s+1}).$$

Представим атрибуты этой задачи в развёрнутом виде.

	b_0	c_1	b_1	c_2	b_2	c_3	$\ldots$	c_s	b_s	c_{s+1}	
p_0	$-B_0$	E	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$= A_0\hat{x}$
q_0	D_0	0	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\leqslant d_0$
p_1	0	$-A_1$	$-B_1$	E	0	0	$\ldots$	0	0	0	$= \mathbb{O}$
q_1	0	0	D_1	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\leqslant d_1$
p_2	0	0	0	$-A_2$	$-B_2$	E	$\ldots$	0	0	0	$= \mathbb{O}$
q_2	0	0	0	0	D_2	0	$\ldots$	0	0	0	$\leqslant d_2$
$\ldots$	$\ldots\ldots$										$\ldots$
p_s	0	0	0	0	0	0	$\ldots$	$-A_s$	$-B_s$	E	$= \mathbb{O}$
q_s	0	0	0	0	0	0	$\ldots$	0	D_s	0	$\leqslant d_s$

Здесь $E = E[N, N]$ — единичная матрица. В крайнем левом столбце указаны блоки двойственных переменных.

Запишем двойственную задачу линейного программирования:

$$\langle A_0\hat{x}, p_0\rangle + \sum_{k=0}^{s} \langle d_k, q_k\rangle \to \inf, \tag{5}$$
$$\begin{gathered} -p_k B_k + q_k D_k = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, s; \\ p_{k-1} - p_k A_k = c_k, \quad k = 1, \ldots, s; \quad p_s = c_{s+1}; \\ q_k \geqslant \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \ldots, s. \end{gathered}$$

Из ограничений задачи (5) выделим соотношения

$$\begin{aligned} & p_{k-1} = p_k A_k + c_k, \quad k = s, s-1, \ldots, 1; \\ & p_s = c_{s+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Они позволяют однозначно определить половину блоков двойственных переменных p_s, p_{s-1}, $\ldots$, p_0. Задача (5) (после отбрасывания постоянной величины $\langle A_0\hat{x}, p_0\rangle$) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{s} \langle d_k, q_k \rangle \to \inf, \tag{7}$$
$$D_k^\top q_k = B_k^\top p_k + b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, s;$$
$$q_k \geqslant \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \ldots, s.$$

Слагаемое с индексом k в целевой функции задачи (7) зависит от блока q_k. На q_k наложены ограничения

$$D_k^\top q_k = B_k^\top p_k + b_k, \quad q_k \geqslant \mathbb{O},$$

которые не зависят от других ограничений. В этом случае значение целевой функции задачи (7) будет наименьшим, если каждое слагаемое независимо примет наименьшее значение. Задача (7) распадается на $s+1$ независимых подзадач (при $k = 0, 1, \ldots, s$)

$$\langle d_k, q_k \rangle \to \inf, \tag{8}$$
$$D_k^\top q_k = B_k^\top p_k + b_k,$$
$$q_k \geqslant \mathbb{O}.$$

Каждая задача вида (8) является задачей линейного программирования. Обозначим через u_k блок двойственных переменных и запишем двойственную задачу:

$$H_k(u_k) := \langle B_k^\top p_k + b_k, u_k \rangle \to \sup, \tag{9}$$
$$D_k u_k \leqslant d_k.$$

Вычислив по формулам (6) блоки двойственных переменных p_s, p_{s-1}, …, p_0 задачи (1) и решив при $k = 0, 1, \ldots, s$ задачи (9), двойственные к задачам (8), найдём последовательность допустимых управлений u_0^*, u_1^*, …, u_s^*. Поскольку мы дважды переходили к двойственным задачам, то можно предположить, что построенная последовательность управлений будет оптимальной для задачи (1). Покажем, что это действительно так.

3°. Обозначим через U_k множество планов задачи (9).

ТЕОРЕМА (принцип максимума)**.** *Для того чтобы последовательность допустимых управлений* $\{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_s^*\}$ *была оптимальной для задачи* (1), *необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $k = 0, 1, \ldots, s$ *выполнялось условие*

$$H_k(u_k^*) = \max_{u_k \in U_k} H_k(u_k), \tag{10}$$

то есть чтобы u_k^* *было решением задачи* (9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\{u_k^*\}_{k=0}^s$ — оптимальная последовательность управлений для задачи (1). Это значит, что блочный вектор

$$(u_0^*,\, x_1^*,\, u_1^*,\, x_2^*,\, u_2^*,\, \ldots,\, x_s^*,\, u_s^*,\, x_{s+1}^*), \tag{11}$$

где блоки x_k^* последовательно вычисляются на основе рекуррентного соотношения (2) и начального условия (4), является решением задачи линейного программирования (1). По первой теореме двойственности двойственная задача (5) также имеет решение

$$(p_0,\, q_0^*,\, p_1,\, q_1^*,\, \ldots,\, p_s,\, q_s^*), \tag{12}$$

в котором блоки p_k последовательно вычисляются (в обратном порядке) по формулам (6). По второй теореме двойственности выполняется условие дополнительности

$$\sum_{k=0}^{s} \langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \rangle = 0. \tag{13}$$

Поскольку $d_k - D_k u_k^* \geqslant \mathbb{O}$ и $q_k \geqslant \mathbb{O}$ при всех $k \in 0 : s$, от из (13) следует, что

$$\langle d_k - D_k u_k^*, q_k^* \rangle = 0 \quad \text{при каждом } k \in 0 : s. \tag{14}$$

Теперь при фиксированном $k \in 0 : s$ рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования (8) и (9). Векторы q_k^* и u_k^* являются планами этих задач и выполняется условие дополнительности (14). По второй теореме двойственности u_k^* — решение задачи (9), что и требовалось установить.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Допустим, что мы вычислили последовательность векторов $p_s, p_{s-1}, \ldots, p_0$ по формулам (6) и при каждом $k \in 0 : s$ нашли решение u_k^* задачи (9). Нужно проверить, что последовательность управлений $\{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_s^*\}$ является оптимальной для задачи (1).

По первой теореме двойственности при каждом $k \in 0 : s$ существует решение q_k^* задачи (8). По второй теореме двойственности выполняется условие дополнительности (14).

Отметим, что векторы (11) и (12) удовлетворяют ограничениям двойственных задач (1) и (5) соответственно, причем как следствие соотношений (14) выполняется условие дополнительности (13). По второй теореме двойственности вектор (11) является решением задачи (1), так что последовательность управлений $\{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_s^*\}$ будет оптимальной.

Теорема доказана. □

4°. Принцип максимума позволяет свести большую задачу (1) к последовательности небольших задач вида (9). Имеется ещё одна особенность принципа максимума. Решение «сопряжённой» системы (6) зависит только от матриц A_k и векторов c_k. Это значит, что сведéние задачи (1) к последовательности задач (9) остаётся в силе при изменении матриц B_k, D_k и векторов b_k, d_k — атрибутов, связанных с управлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов С. А. *Линейное программирование.* М.: Наука, 1981. 340 с.