ОСНОВНАЯ ЛЕММА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

7 ноября 2013 г.

1°. Термин “основная лемма” впервые появился в вариационном исчислении.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. *Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Если для любой функции $h(t)$, непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ и удовлетворяющей граничным условиям $h(a)=0$, $h(b)=0$, выполняется равенство*

$$\int_a^b \bigl[\alpha(t)h'(t)+\beta(t)h(t)\bigr]=0,$$

то необходимо $\alpha(t)$ непрерывно дифференцируема и

$$\alpha'(t)\equiv\beta(t) \quad \text{на} \quad [a,b].$$

Эта лемма используется при выводе уравнения Эйлера.

По аналогии, в [1, с. 26–27] введена

ОСНОВНАЯ ЛЕММА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. *Допустим, что совместна система линейных соотношений*

$$\begin{aligned} \langle c,x\rangle &= \mu,\\ Ax &= b,\\ x &\geqslant \mathbb{O}, \end{aligned}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где $A = A[M, N]$ — некоторая матрица, однако при уменьшении μ она становится несовместной. Тогда совместна такая система:

$$\langle b, u\rangle = \mu,$$
$$uA \leqslant c.$$

С помощью этой леммы выводятся необходимые условия оптимальности в задаче линейного программирования.

Следующее утверждение я называю основной леммой нелинейного программирования.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. *Рассмотрим систему нелинейных уравнений*

$$a_i(x) = 0, \quad i \in I, \tag{1}$$

где $x = x[N]$ и N, I — конечные индексные множества, $|I| < |N|$. Пусть точка x_0 удовлетворяет системе (1), функции $a_i(x)$ при всех $i \in I$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x_0 и выполнено условие регулярности: градиенты $a_i'(x_0)$, $i \in I$, линейно независимы. Тогда для любого ненулевого вектора $g_0 \in \mathbb{R}^N$, ортогонального всем градиентам $a_i'(x_0)$, можно построить параметрическую кривую $x = x(t)$, непрерывно дифференцируемую в окрестности точки $t = 0$, со свойствами

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = g_0, \tag{2}$$

$$a_i\big(x(t)\big) \equiv 0 \text{ при } t \in (-\delta, \delta) \text{ и всех } i \in I, \tag{3}$$

где δ — некоторое положительное число.

На рисунке иллюстрируется содержание этой леммы в случае, когда система (1) состоит из одного уравнения $a(x) = 0$ и $x = (x^1,\ x^2,\ x^3)$.

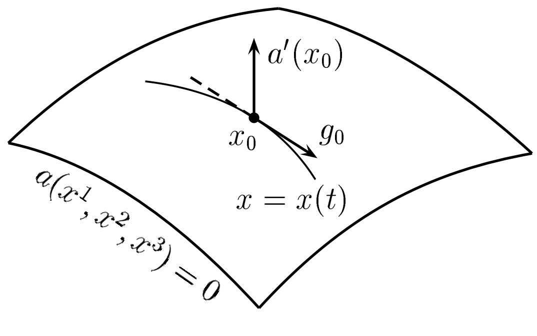

Рис.

В данном докладе приводится доказательство основной леммы нелинейного программирования. Эта лемма используется при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка [2] и необходимого условия оптимальности второго порядка [3] в задаче нелинейного программирования.

2°. Начнём с предварительного анализа. Для любой вектор-функции $x = x(t)$, непрерывно дифференцируемой в окрестности точки $t = 0$, справедлива формула
$$\frac{d}{dt}\, a_i\bigl(x(t)\bigr) = \Bigl\langle a_i'\bigl(x(t)\bigr), x'(t)\Bigr\rangle.$$
По теореме о среднем для функций одной переменной имеем
$$a_i\bigl(x(t)\bigr) = a_i\bigl(x(0)\bigr) + \Bigl\langle a_i'\bigl(x(\xi_i)\bigr), x'(\xi_i)\Bigr\rangle\, t, \tag{4}$$
где $\xi_i \in (0, t)$. Значит, если обеспечить выполнение условий
$$\begin{gathered}\Bigl\langle a_i'\bigl(x(t)\bigr), x'(t)\Bigr\rangle = 0, \quad t \in (-\delta, \delta),\ i \in I;\\ x(0) = x_0.\end{gathered} \tag{5}$$
то из (4) будет следовать справедливость тождеств (3) (напомним, что точка x_0 удовлетворяет системе (1), так что $a_i\bigl(x(0)\bigr) = a_i(x_0) = 0$).

Условия (5) — это система дифференциальных уравнений. Приведём её к нормальной форме. Обозначим через $A'(x)$ матрицу со строками $a_i'(x)$, $i \in I$. Тогда систему (5) можно переписать в виде
$$\begin{aligned} A'(x)x' &= \mathbb{O},\\ x(0) &= x_0.\end{aligned} \tag{6}$$

По условию леммы строки матрицы $A'(x_0)$ линейно независисмы. Учитывая определение ранга матрицы, заключаем, что существует индексное множество $J \subset N$, такое, что $|J| = |I|$ и подматрица $A'(x_0)[I, J]$ обратима. С помощью этой подматрицы последнее условие леммы (условие ортогональности $A'(x_0)g_0 = \mathbb{O}$) запишем так:
$$A'(x_0)[I, J] \times g_0[J] + A'(x_0)[I, N \setminus J] \times g_0[N \setminus J] = \mathbb{O}[I].$$
Отсюда следует, что
$$g_0[J] = -\bigl(A'(x_0)[I, J]\bigr)^{-1} \times A'(x_0)[I, N \setminus J] \times g_0[N \setminus J]. \tag{7}$$

По аналогии, равенство $A'(x)x' = \mathbb{O}$ запишем в виде
$$A'(x)[I, J] \times x'[J] + A'(x)[I, N \setminus J] \times x'[N \setminus J] = \mathbb{O}[I]. \tag{8}$$

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t)[N \setminus J] = g_0[N \setminus J], & (9) \\ x'(t)[J] = -\big(A'(x)[I, J]\big)^{-1} \times A'(x)[I, N \setminus J] \times g_0[N \setminus J], & (10) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0.$$

Покажем, что решение этой системы является требуемой параметрической кривой.

Мы хотим воспользоваться теоремой Пеано (см., например, [4, с. 49]). Для этого нужно проверить, что правая часть автономной системы (9), (10) непрерывна в окрестности точки x_0. Элементы матрицы $A'(x)$ непрерывны в окрестности точки x_0 по условию леммы. У невырожденной матрицы $A'(x_0)[I, J]$ определитель отличен от нуля. По теореме о стабилизации знака он остаётся ненулевым и в некоторой окрестности точки x_0. Элементы обратной матрицы $\big(A'(x)[I, J]\big)^{-1}$ можно представить в виде отношения двух определителей, причём в знаменателе стоит определитель матрицы $A'(x)[I, J]$, отличный от нуля. Ясно, что эти отношения непрерывны в некоторой окрестности точки x_0.

Установлено, что правая часть системы (9), (10) непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. По теореме Пеано эта система имеет решение $x = x(t)$, непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $t = 0$ и удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Подставив в (9), (10) $t = 0$ и приняв во внимание равенство (7), получим $x'(0) = g_0$. Значит, выполнены условия (2) леммы.

Теперь подставим $g_0[N \setminus J] = x'(t)[N \setminus J]$ в правую часть (10) и умножим возникающее равенство слева на $A'(x)[I, J]$. Придём к формуле (8), равносильной соотношению $A'(x)x' = \mathbb{O}$. Последнее вместе с равенством $x(0) = x_0$ гарантирует, как отмечалось, выполнение условия (3) леммы.

Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

2. Малозёмов В. Н. *Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 февраля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0227`)

3. Малозёмов В. Н. *Условия оптимальности второго порядка в нелинейном программировании* // Семинар «DHA & CAGD». 16 октября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1016`)

4. Бибиков Ю. Н. *Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 232 с.