САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Пахомов Сергей Николаевич

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург
2005 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций
математико–механического факультета
Санкт–Петербургского Государственного Университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико–математических наук, профессор
МАЛОЗЕМОВ Василий Николаевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
доктор физико–математических наук, профессор
ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович,

кандидат физико-математических наук
ТРЕТЬЯКОВ Алексей Андреевич

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:
Санкт–Петербургский Государственный
Электротехнический Университет «ЛЭТИ»

Защита состоится "26" мая 2005 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт–Петербургском Государственном Университете по адресу: 199044, Санкт–Петербург, 14 линия Васильевского острова, д.29, ауд. 31.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт–Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт–Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "____"________________ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В дискретном гармоническом анализе фундаментальную роль играет дискретное преобразование Фурье (ДПФ). С момента изобретения в 1965 г. алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) последний находится в центре внимания как математиков, так и инженеров, занимающихся цифровой обработкой сигналов. В последние годы интерес к быстрым преобразованиям повысился в связи с тем, что возникла необходимость обрабатывать непериодические сигналы, имеющие огромное число отсчетов. В первую очередь это относится к цифровой обработке звука и изображений.

При решении различных задач обработки непериодических сигналов в реальном масштабе времени требуется оперативный анализ частотного спектра конечной выборки сигнала, скользящей вдоль оси дискретного времени. Применение периодической техники в таких задачах позволяет повысить оперативность анализа спектра. Однако все классические БПФ по своей сути являются алгоритмами статического типа, поскольку оперируют только с отсчетами, накопленными к моменту анализа, и не учитывают результаты расчетов на предыдущих шагах скольжения. В то же время при незначительном сдвиге выборки основная часть информации остается неизменной. Это создает предпосылки для разработки более эффективных в вычислительном плане алгоритмов.

В диссертационной работе развиваются существующие идеи вычисления скользящего спектра Фурье и предлагаются новые методы вычисления как статического, так и скользящего сегмента спектра сигнала.

Цель работы. Целью работы является разработка и исследование быстрых алгоритмов обработки дискретных непериодических данных. Для достижения этой цели в диссертации решались следующие задачи:

1) *Разработка алгоритмов анализа сегмента спектра Фурье и синтеза сегмента входного сигнала.*

2) *Разработка алгоритмов анализа скользящего сегмента спектра Фурье.*

3) *Создание программного обеспечения для решения задачи восстановления высоких гармоник звуковых сигналов и проведение экспериментальных исследований с использованием разработанного программного продукта.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовался математический аппарат дискретного гармонического анализа и цифровой обработки сигналов.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) *Разработаны и исследованы алгоритмы анализа сегмента спектра Фурье по полному сигналу и алгоритмы синтеза сегмента входного сигнала по полному спектру с прореживанием по времени и по частоте.*

2) *Разработаны и исследованы алгоритмы анализа центрального сегмента спектра Фурье и синтеза центрального сегмента входного сигнала.*

3) *Разработаны и исследованы алгоритмы анализа скользящего сегмента спектра Фурье при сдвиге входного сигнала на один отсчет и при двоичном сдвиге сигнала.*

4) *Для всех предложенных алгоритмов проведена оценка эффективности в сравнении с существующими вычислительными схемами.*

Практическая ценность. Разработан программный продукт, позволяющий производить обогащение звуковых моно- и стереосигналов высокими частотами. Проведены экспериментальные исследования с использованием созданного программного обеспечения.

Апробация работы и публикации. По результатам диссертации сделан цикл докладов на семинаре по дискретному гармоническому анализу и доклад на семинаре кафедры исследования операций математико-механического факультета СПбГУ. По теме диссертации опубликовано 5 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Первая глава включает в себя 8 параграфов, вторая и третья — 6 и 7 параграфов соответственно. Объем диссертации — 99 страниц. Список литературы насчитывает 38 наименований.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

В первой главе предлагается новый подход к вычислению сегмента спектра Фурье. В отличие от существующих методов, при данном подходе вычисляются только требуемые компоненты спектра, и при этом лишних операций не производится. В первом параграфе приводятся предварительные сведения. Параграфы со второго по четвертый содержат описание полученных результатов.

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $a : b$ — множество последовательных целых чисел $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Целое число j можно единственным образом представить в виде $j = j'r + j''$, где r — натуральное число и $j'' \in 0 : r-1$. Для неполного частного j' и остатка j'' используются обозначения $j' = \lfloor j/r \rfloor$, $j'' = \langle j \rangle_r$.

Пусть s — натуральное число и $N = 2^s$. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами*, а величины $x(j)$ — *компонентами* (или *отсчетами*) сигнала. Дискретное преобразование Фурье $\mathfrak{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ сопоставляет сигналу x сигнал $X = \mathfrak{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Сигнал X называется *спектром Фурье* сигнала x, а величины $X(k)$ — *компонентами спектра.*

Положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$ и введем в рассмотрение перестановку rev_ν, которая сопоставляет числу $j \in 0 : 2^\nu - 1$ число $\mathrm{rev}_\nu(j)$, двоичный код которого равен перевернутому ν-разрядному двоичному коду числа j.

Пусть необходимо анализировать только часть компонент спектра, индексы которых принадлежат заданному промежутку $a : b$, $0 \le a \le b \le N - 1$. Назовем такую выборку *сегментом спектра Фурье.* Обозначим $n = b - a + 1,\ r = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Теорема 1. *Компоненты сегмента спектра $X(k),\ k \in a : b$ могут быть вычислены по полному сигналу x согласно формулам:*

$$x_0(k) = x(\mathrm{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N-1; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \\ x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ l \in 0 : \Delta_\nu - 1,\ \nu \in 1 : r; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = x_{\nu-1}(\langle l \rangle_{\Delta_\nu} + 2p\Delta_\nu) + \\ +(-1)^{\lfloor l/\Delta_\nu \rfloor} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-\langle l \rangle_{\Delta_\nu}} x_{\nu-1}(\langle l \rangle_{\Delta_\nu} + (2p+1)\Delta_\nu), \\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ l = \langle a \rangle_{\Delta_{\nu+1}}, \langle a+1 \rangle_{\Delta_{\nu+1}}, \dots, \langle b \rangle_{\Delta_{\nu+1}}, \\ \nu \in r+1 : s; \end{gathered} \tag{3}$$

$$X(k) = x_s(k), \quad k \in a : b. \tag{4}$$

Вычисления по формулам (1)–(4) назовем *анализом сегмента спектра Фурье с прореживанием по времени.* Для этих вычислений требуется выполнить

$$M = \frac{N}{2} r + n\big(N \cdot 2^{-r} - 1\big) \tag{5}$$

комплексных умножений и

$$A = Nr + n\big(N \cdot 2^{-r} - 1\big) \tag{6}$$

комплексных сложений.

Теорема 2. *Компоненты сегмента спектра* $Y(k)$, $k \in a : b$ *могут быть вычислены по полному сигналу* y *согласно формулам:*

$$y_0(k) = y(k), \quad k \in 0 : N-1; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} y_\nu(2lN_\nu + p) = y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + \omega_N^{-\operatorname{rev}_s(2l)} y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ y_\nu((2l+1)N_\nu + p) = y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) - \omega_N^{-\operatorname{rev}_s(2l)} y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ l \in 0 : \Delta_\nu - 1,\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ \nu \in 1 : r; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} y_\nu(lN_\nu + p) = y_{\nu-1}(\lfloor l/2 \rfloor N_{\nu-1} + p) + \\ +(-1)^l \omega_N^{-\operatorname{rev}_s(2\lfloor l/2 \rfloor)} y_{\nu-1}(\lfloor l/2 \rfloor N_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ l = \lfloor \operatorname{rev}_s(a)/N_\nu \rfloor, \lfloor \operatorname{rev}_s(a+1)/N_\nu \rfloor, \ldots, \lfloor \operatorname{rev}_s(b)/N_\nu \rfloor, \\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ \nu \in r+1 : s; \end{gathered} \tag{9}$$

$$Y(k) = y_s(\operatorname{rev}_s(k)), \quad k \in a : b. \tag{10}$$

Вычисления по формулам (7)–(10) назовем *анализом сегмента спектра Фурье с прореживанием по частоте*. Для этих вычислений также требуются комплексные умножения и сложения в количестве, определяемом соотношениями (5), (6).

В задачах цифровой обработки сигналов возникают не только проблемы анализа (вычисления спектра), но и проблемы синтеза (восстановления сигнала по его спектру). В таких задачах зачастую восстанавливают не весь сигнал, а лишь его внутренний сегмент. В параграфах 5–7 первой главы разработаны соответствующие алгоритмы.

Теорема 3. *Компоненты сегмента входного сигнала* $x(k)$, $k \in$ $\in a : b$ *могут быть вычислены по его полному спектру* X *согласно формулам:*

$$x_s(k) = X(k), \quad k \in 0 : N-1; \tag{11}$$

$$\begin{gathered} x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) = \tfrac{1}{2}[x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) + x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})], \\ x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu) = \tfrac{1}{2}\omega^l_{\Delta_{\nu+1}}[x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) - x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})], \\ p \in 0 : N_\nu - 1,\ l \in 0 : \Delta_\nu - 1,\ \nu = s, s-1, \ldots, s-r+1; \end{gathered} \tag{12}$$

$$
\begin{gathered}
x_{\nu-1}(l+p\Delta_\nu)=\tfrac{1}{2}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\langle p\rangle_2 l}[x_\nu(l+\lfloor p/2\rfloor\Delta_{\nu+1})+\\
+(-1)^p x_\nu(l+\Delta_\nu+\lfloor p/2\rfloor\Delta_{\nu+1})],\\
p=\lfloor \mathrm{rev}_s(a)/\Delta_\nu\rfloor, \lfloor \mathrm{rev}_s(a+1)/\Delta_\nu\rfloor, \ldots, \lfloor \mathrm{rev}_s(b)/\Delta_\nu\rfloor,\\
l\in 0:\Delta_\nu-1,\ \nu=s-r, s-r-1,\ldots,1;
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
x(k)=x_0(\mathrm{rev}_s(k)),\quad k\in a:b. \tag{14}
$$

Вычисления по формулам (11)–(14) назовем *синтезом сегмента входного сигнала с прореживанием по времени.* Для этих вычислений также требуются комплексные умножения и сложения в количестве, определяемом соотношениями (5), (6).

Теорема 4. *Компоненты сегмента входного сигнала $y(k)$, $k \in \in a:b$ могут быть вычислены по его полному спектру Y согласно формулам:*

$$
y_s(k)=Y(\mathrm{rev}_s(k)),\quad k\in 0:N-1; \tag{15}
$$

$$
\begin{gathered}
y_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+p)=\tfrac{1}{2}[y_\nu(2lN_\nu+p)+y_\nu((2l+1)N_\nu+p),\\
y_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)=\tfrac{1}{2}\omega_N^{\mathrm{rev}_s(2l)}[y_\nu(2lN_\nu+p)-y_\nu((2l+1)N_\nu+p)],\\
l\in 0:\Delta_\nu-1,\ p\in 0:N_\nu-1,\ \nu=s,s-1,\ldots,s-r+1;
\end{gathered}
\tag{16}
$$

$$
\begin{gathered}
y_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+p)=\tfrac{1}{2}\omega_N^{\lfloor p/N_\nu\rfloor\,\mathrm{rev}_s(2l)}[y_\nu(2lN_\nu+\langle p\rangle_{N_\nu})+\\
+(-1)^{\lfloor p/N_\nu\rfloor}y_\nu((2l+1)N_\nu+\langle p\rangle_{N_\nu})],\\
l\in 0:\Delta_\nu-1,\ p=\langle a\rangle_{N_{\nu-1}}, \langle a+1\rangle_{N_{\nu-1}},\ldots,\langle b\rangle_{N_{\nu-1}},\\
\nu=s-r,s-r-1,\ldots,1;
\end{gathered}
\tag{17}
$$

$$
y(k)=y_0(k),\quad k\in a:b. \tag{18}
$$

Вычисления по формулам (15)–(18) назовем *синтезом сегмента входного сигнала с прореживанием по частоте.* Для этих вычислений также требуются комплексные умножения и сложения в количестве, определяемом соотношениями (5), (6).

В восьмом параграфе первой главы для всех полученных вычислительных схем проведена оценка эффективности в сравнении с существующими алгоритмами.

Во второй главе разработаны динамические алгоритмы пересчета спектра Фурье, применимые при сдвиге сигнала на один отсчет и при двоичном сдвиге сигнала (т.е. сдвиге на число отсчетов, являющееся степенью двойки). В первом параграфе приведены предварительные сведения. Второй и третий параграфы содержат описание полученных результатов.

Рассматриваются комплекснозначные функции целочисленного аргумента $x = x(j),\ j \in \mathbb{Z}$, не являющиеся периодическими. Множество таких функций обозначим $\mathbb{C}_\infty$.

Назовем *скользящим спектром* спектр конечной выборки функции x, перемещающийся вдоль временной оси:

$$X_l(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(l-j)\omega_N^{-kj}, \quad k \in 0 : N-1,$$

где $l \in \mathbb{Z}$ — некоторый момент дискретного времени. Выборку $X_l(k)$, $k \in a : b$, где $0 \le a \le b \le N-1$, назовем *сегментом* скользящего спектра.

Кроме того, введем в рассмотрение сигналы X_l^ν при $\nu \in 0 : s$, $l \in \mathbb{Z}$, с компонентами

$$X_l^\nu(k) = \sum_{j=0}^{N_\nu-1} x(l-\Delta_{\nu+1}j)\omega_{N_\nu}^{-kj}, \quad k \in 0 : N_\nu - 1.$$

Теорема 5. *Пусть известны компоненты $X_{l-\Delta_\nu}^\nu(k)$, $k \in 0 : N_\nu - 1$, $\nu \in 1 : s$. Тогда компоненты $X_l^0(k)$, $k \in 0 : N-1$ могут быть вычислены по формулам*

$$\begin{gathered} X_l^{\nu-1}(k) = X_l^\nu(k) + \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} X_{l-\Delta_\nu}^\nu(k), \\ X_l^{\nu-1}(N_\nu + k) = X_l^\nu(k) - \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} X_{l-\Delta_\nu}^\nu(k), \\ k \in 0 : N_\nu - 1,\ \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Вычисления по формуле (19) назовем *анализом спектра Фурье при сдвиге сигнала на один отсчет.* Эти вычисления требуют выполнения

$$M_1 = N-1,\ A_1 = 2N-2$$

комплексных умножений и комплексных сложений соответственно. При этом необходимо хранить в памяти

$$R_1 = \frac{1}{2} N \log_2 N$$

вспомогательных компонент.

Теорема 6. *Пусть известны компоненты* $X^{\nu}_{l-\Delta_\nu}(k)$, $k = \langle a \rangle_{N_\nu}$, $\langle a+1 \rangle_{N_\nu}, \ldots, \langle b \rangle_{N_\nu}$, $\nu \in 1 : s-r$, *и* $X^{\nu}_{l-\Delta_\nu}(k)$, $k \in 0 : N_\nu - 1$, $\nu \in s-r+1 : s$. *Тогда компоненты* $X^0_l(k)$, $k \in a : b$ *могут быть вычислены по формулам*

$$\begin{gathered} X_l^{\nu-1}(k) = X_l^{\nu}(k) + \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} X^{\nu}_{l-\Delta_\nu}(k), \\ X_l^{\nu-1}(N_\nu + k) = X_l^{\nu}(k) - \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} X^{\nu}_{l-\Delta_\nu}(k), \\ k \in 0 : N_\nu - 1, \ \nu = s, s-1, \ldots, s-r+1; \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} X_l^{\nu-1}(k) = X_l^{\nu}\big(\langle k \rangle_{N_\nu} \big) + (-1)^{\lfloor k/N_\nu \rfloor} \omega_{N_{\nu-1}}^{-\langle k \rangle_{N_\nu}} X^{\nu}_{l-\Delta_\nu}\big(\langle k \rangle_{N_\nu} \big), \\ k = \langle a \rangle_{N_{\nu-1}}, \langle a+1 \rangle_{N_{\nu-1}}, \ldots, \langle b \rangle_{N_{\nu-1}}, \ \nu = s-r, s-r-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Вычисления по формулам (20)–(21) назовем *анализом сегмента спектра Фурье при сдвиге сигнала на один отсчет*. Эти вычисления требуют выполнения

$$M_2 = n(s-r) + 2^r - 1, \ A_2 = n(s-r) + 2^{r+1} - 2$$

комплексных умножений и комплексных сложений соответственно. При этом необходимо хранить в памяти

$$R_2 = \frac{1}{2} N r + n(2^{s-r} - 1)$$

вспомогательных компонент.

В четвертом и пятом параграфах второй главы аналогичные алгоритмы получены для двоичного сдвига сигнала.

Положим $m = 2^t$, $t \in 0 : s$.

Теорема 7. *Пусть известны компоненты* $X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k)$, $k \in 0 : N_\nu-$ -1, $p \in 0 : m-1$, $\nu \in t+1 : s$. *Тогда компоненты* $X^0_l(k)$, $k \in 0 : N-1$ *могут быть вычислены по формулам*

$$\begin{gathered} X^{\nu-1}_{l-p}(k) = X^{\nu}_{l-p}(k) + \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k), \\ X^{\nu-1}_{l-p}(N_\nu + k) = X^{\nu}_{l-p}(k) - \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k), \\ k \in 0 : N_\nu - 1,\ p \in 0 : \min\{m, \Delta_\nu\} - 1,\ \nu = s, s-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{22}$$

Вычисления по формуле (22) назовем *анализом спектра Фурье при двоичном сдвиге сигнала.* Эти вычисления требуют выполнения

$$M_3 = \frac{1}{2}Nt + N - m,\ A_3 = Nt + 2N - 2m$$

комплексных умножений и комплексных сложений соответственно. При этом необходимо хранить в памяти

$$R_3 = \frac{1}{2}N(s-t)$$

вспомогательных компонент.

В случае *анализа сегмента спектра при двоичном сдвиге сигнала* форма алгоритма зависит от соотношения величин s, t и r. Рассмотрим отдельно два случая: $0 \le t \le s-r$ и $s-r \le t \le s$ (при $t = s-r$ полученные алгоритмы совпадают).

Теорема 8. *Пусть* $0 \le t \le s-r$ *и при* $p \in 0 : m-1$ *известны компоненты* $X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k)$, $k = \langle a \rangle_{N_\nu}, \langle a+1 \rangle_{N_\nu}, \ldots, \langle b \rangle_{N_\nu}$, $\nu \in t+$ $+1 : s-r$ *и* $X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k)$, $k \in 0 : N_\nu - 1$, $\nu \in s-r+1 : s$. *Тогда компоненты* $X^0_l(k)$, $k \in a : b$ *могут быть вычислены по формулам*

$$\begin{gathered} X^{\nu-1}_{l-p}(k) = X^{\nu}_{l-p}(k) + \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k), \\ X^{\nu-1}_{l-p}(N_\nu + k) = X^{\nu}_{l-p}(k) - \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k), \\ k \in 0 : N_\nu - 1,\ p \in 0 : m-1,\ \nu = s, s-1, \ldots, s-r+1. \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} X^{\nu-1}_{l-p}(k) = X^{\nu}_{l-p}\big(\langle k \rangle_{N_\nu}\big) + (-1)^{\lfloor k/N_\nu \rfloor} \omega^{-\langle k \rangle_{N_\nu}}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}\big(\langle k \rangle_{N_\nu}\big), \\ k = \langle a \rangle_{N_{\nu-1}}, \langle a+1 \rangle_{N_{\nu-1}}, \ldots, \langle b \rangle_{N_{\nu-1}},\ p \in 0 : \min\{m, \Delta_\nu\} - 1, \\ \nu = s-r, s-r-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{24}$$

Вычисления по формулам (23)–(24) требуют выполнения

$$\begin{gathered} M_4 = n(m-1) + nm(s-r-t) + m(2^r - 1), \\ A_4 = n(m-1) + nm(s-r-t) + 2m(2^r - 1) \end{gathered}$$

комплексных умножений и комплексных сложений соответственно. При этом необходимо хранить в памяти

$$R_4 = \frac{1}{2} Nr + n(2^{s-r} - m)$$

вспомогательных компонент.

Теорема 9. *Пусть* $s - r \leq t \leq s$ *и известны компоненты* $X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k)$, $k \in 0 : N_\nu - 1$, $p \in 0 : m - 1$, $\nu \in t + 1 : s$. *Тогда компоненты* $X^0_l(k)$, $k \in a : b$ *могут быть вычислены по формулам*

$$\begin{gathered} X^{\nu-1}_{l-p}(k) = X^{\nu}_{l-p}(k) + \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k), \\ X^{\nu-1}_{l-p}(N_\nu + k) = X^{\nu}_{l-p}(k) - \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}(k), \\ k \in 0 : N_\nu - 1,\ p \in 0 : \min\{m, \Delta_\nu\} - 1, \\ \nu = s, s-1, \ldots, s-r+1. \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} X^{\nu-1}_{l-p}(k) = X^{\nu}_{l-p}\big(\langle k \rangle_{N_\nu}\big) + (-1)^{\lfloor k/N_\nu \rfloor} \omega^{-\langle k \rangle_{N_\nu}}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l-p-\Delta_\nu}\big(\langle k \rangle_{N_\nu}\big), \\ k = \langle a \rangle_{N_{\nu-1}}, \langle a+1 \rangle_{N_{\nu-1}}, \ldots, \langle b \rangle_{N_{\nu-1}}\ \ p \in 0 : \Delta_\nu - 1, \\ \nu = s-r, s-r-1, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{26}$$

Вычисления по формулам (25)–(26) требуют выполнения

$$\begin{gathered} M_5 = n(2^{s-r} - 1) + \tfrac{1}{2} N(t - s + r) + N - m, \\ A_5 = n(2^{s-r} - 1) + N(t - s + r) + 2N - 2m \end{gathered}$$

комплексных умножений и комплексных сложений соответственно. При этом необходимо хранить в памяти

$$R_5 = \frac{1}{2} N(s - t)$$

вспомогательных компонент.

В шестом параграфе второй главы для всех полученных вычислительных схем проведена оценка эффективности в сравнении с существующими алгоритмами.

Третья глава посвящена применению разработанных алгоритмов для решения прикладных задач.

В первом параграфе приводятся предварительные сведения. Параграфы со второго по пятый содержат постановку задачи восстановления высоких гармоник звуковых одно- и двухканальных сигналов, алгоритм решения, требования к программно-аппаратному комплексу и описание разработанного программного продукта. В шестом параграфе приводятся результаты экспериментальных исследований по восстановлению моно- и стереосигналов. В седьмом параграфе приводится краткий обзор других задач обработки звука, в которых могут быть использованы разработанные в диссертационной работе алгоритмы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Пахомов С.Н. *Анализ скользящего сегмента спектра Фурье* // Вестник молодых ученых. Сер. «Прикладная математика и механика». 2004. № 1. С. 21-26.

2. Пахомов С.Н. *Вычисление внутреннего сегмента спектра Фурье* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2003. Вып. 3 (№ 17). С. 79-83.

3. Пахомов С.Н. *Вычисление скользящего спектра Фурье* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 3 (№ 17). С. 45-49.

4. Пахомов С.Н. *Анализ сегмента спектра Фурье и синтез сегмента входного сигнала* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт № 2005-04.

5. Пахомов С.Н., Просеков О.В. *Вычислительные аспекты быстрого преобразования Фурье* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 4. С. 44-50.