ПРЕДЕЛ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ*

Н. В. Чашников
nik239@list.ru

13 марта 2010 г.

Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B-сплайн первого порядка как m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_1(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{при } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } x \in [1, m-1], \\ x - m + 1, & \text{при } x \in (m-1, m]. \end{cases}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_r(x) = \int_0^m P_{r-1}(x-t)\, P_1(t)\, dt, \qquad r = 2, 3, \ldots .$$

Пусть $z(0), z(1), \ldots, z(m-1)$ — фиксированные комплексные числа, а r — произвольное натуральное число. В [1] показано, что найдётся единственный сплайн вида

$$S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c(q)\, P_r(x-q), \tag{1}$$

являющийся решением интерполяционной задачи

$$S_r(l) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{2}$$

Покажем, как найти предел сплайнов S_r при неограниченном возрастании r. Идея доказательства взята из [2], где установлен более общий результат.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

1°. Разложим B-сплайн P_r в ряд Фурье.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$P_r(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m} \sum_{s=1}^{\infty} \Bigl(\frac{m}{\pi s} \, \sin \frac{\pi s}{m} \Bigr)^{2r} \cos \frac{2\pi s x}{m} \,. \tag{3}$$

Доказательство. Проверим по индукции, что функции $P_r(x)$ — чётные. База индукции при $r = 1$ следует из определения функции $P_1(x)$. Сделаем индукционный переход. Для $r > 1$, принимая во внимание чётность $P_1(x)$, индукционное предположение о чётности $P_{r-1}(x)$ и m-периодичность этих функций, получаем

$$P_r(-x) = \int_0^m P_{r-1}(-x-t)\, P_1(t)\, dt = \int_0^m P_{r-1}(x+t)\, P_1(t)\, dt =$$

$$= \int_0^m P_{r-1}\bigl(x-(m-t)\bigr)\, P_1(m-t)\, dt = \int_0^m P_{r-1}(x-t)\, P_1(t)\, dt = P_r(x).$$

Чётность функций $P_r(x)$ доказана.

Ряд Фурье для $P_r(x)$ имеет вид

$$\frac{b_{r,0}}{m} + \frac{2}{m} \sum_{s=1}^{\infty} b_{r,s} \, \cos \frac{2\pi s x}{m} \,,$$

где

$$b_{r,s} = \int_0^m P_r(x) \, \cos \frac{2\pi s x}{m} \, dx.$$

Покажем, используя метод математической индукции, что

$$b_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 0, \\ \bigl(\frac{m}{\pi s} \, \sin \frac{\pi s}{m} \bigr)^{2r} & \text{при } s > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Проверим базу индукции. Для $s = 0$ имеем

$$b_{1,0} = \int_0^m P_1(x)\, dx = 1.$$

Пусть $s > 0$. Тогда, используя чётность P_1 и интегрируя по частям, получаем

$$b_{1,s} = \int_0^m P_1(x) \, \cos \frac{2\pi s x}{m} \, dx = 2 \int_0^1 (1-x) \, \cos \frac{2\pi s x}{m} \, dx =$$

$$= \frac{m}{\pi s} \int_0^1 (1-x) \, d \sin \frac{2\pi s x}{m} = \frac{m}{\pi s} \int_0^1 \sin \frac{2\pi s x}{m} \, dx =$$

$$= -\frac{m^2}{2\pi^2 s^2} \, \cos \frac{2\pi s x}{m} \Big|_0^1 = \frac{m^2}{2\pi^2 s^2} \Bigl(1 - \cos \frac{2\pi s}{m} \Bigr) = \Bigl(\frac{m}{\pi s} \, \sin \frac{\pi s}{m} \Bigr)^2.$$

Сделаем индукционный переход. При $s \geqslant 0$ имеем

$$b_{r,s} = \int_0^m P_r(x)\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\, dx = \int_0^m \left(\int_0^m P_{r-1}(x-t)\, P_1(t)\, dt\right) \cos\frac{2\pi sx}{m}\, dx =$$

$$= \int_0^m P_1(t) \left(\int_0^m P_{r-1}(x)\, \cos\frac{2\pi s(x+t)}{m}\, dx\right) dt =$$

$$= \int_0^m P_1(t) \Big(\cos\frac{2\pi st}{m} \int_0^m P_{r-1}(x)\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\, dx -$$

$$- \sin\frac{2\pi st}{m} \int_0^m P_{r-1}(x)\, \sin\frac{2\pi sx}{m}\, dx\Big)\, dt.$$

Вычитаемый интеграл равен нулю в силу чётности функции $P_{r-1}(x)$. Поэтому

$$b_{r,s} = b_{r-1,s} \int_0^m P_1(t)\, \cos\frac{2\pi st}{m}\, dx = b_{r-1,s}\, b_{1,s}\,.$$

Отсюда, воспользовавшись индукционным предположением, получим при $s = 0$

$$b_{r,0} = 1,$$

а при $s > 0$

$$b_{r,s} = \left(\frac{m}{\pi s}\, \sin\frac{\pi s}{m}\right)^{2r}.$$

Формула (4) доказана. Значит, правая часть (3) действительно является рядом Фурье для функции $P_r(x)$. Этот ряд при $r \geqslant 1$ сходится равномерно. Для завершения доказательства леммы осталось воспользоваться следующим утверждением (см., например, [3, с. 68]) :

если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[0, m]$ функции $f(x)$ сходится равномерно, то сумма этого ряда совпадает на $[0, m]$ с $f(x)$. $\square$

2°. Положим $\mu = \lfloor m/2 \rfloor$. В [4] были введены тригонометрические полиномы порядка μ:

$$d_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\mu} \cos\frac{2\pi kx}{m} \qquad \text{при нечётном } m \ (m = 2\mu + 1),$$

$$d_m(x) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\mu-1} \cos\frac{2\pi kx}{m} + \frac{\cos(\pi x)}{m} \qquad \text{при чётном } m \ (m = 2\mu).$$

Было показано, что

$$d_m(l) = \delta_m(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Определим Π_m как пространство чётных тригонометрических полиномов вида

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\mu} a_k \cos\frac{2\pi kx}{m}\,.$$

Полином $d_m(x)$, очевидно, принадлежит пространству Π_m.

ЛЕММА 2. *Для любого тригонометрического полинома $T(x)$ из пространства Π_m справедливо тождество*

$$T(x) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(x-q), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим правую часть (5) через $\eta(x)$. Ясно, что $\eta(x)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше μ. В силу чётности и m-периодичности $d_m(x)$ и $T(x)$ имеем

$$\eta(-x) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(-x-q) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(x+q) =$$
$$= \sum_{q=0}^{m-1} T(-q)\, d_m(x-q) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(x-q) = \eta(x).$$

Значит, $\eta(x)$ чётная фунция, поэтому $\eta(x)$ принадлежит пространству Π_m.

Для любого $l \in 0 : m-1$ имеем

$$\eta(l) = \sum_{q=0}^{m-1} T(q)\, d_m(l-q) = T(l).$$

Таким образом, числа l являются корнями чётного тригонометрического полинома $T(x) - \eta(x)$ порядка μ. Как известно, для любого натурального k функцию $\cos(kx)$ можно записать в виде алгебраического полинома степени k от $\cos x$. Поэтому найдётся полином $f(t)$ степени не выше μ, такой, что

$$T(x) - \eta(x) \equiv f\big(\cos\tfrac{2\pi x}{m}\big).$$

Следовательно, значения

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{m}\,,\ \cos\frac{4\pi}{m}\,, \ldots,\ \cos\frac{2\pi\mu}{m}$$

являются корнями полинома $f(t)$. Все эти значения различны и их количество равно $\mu+1$. Значит, полином $f(t)$ тождественно равен нулю, то есть $T(x) \equiv \equiv \eta(x)$.

Лемма доказана. $\square$

3°. Пусть $h_r(x)$ — фундаментальный сплайн вида

$$h_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c(q)\, P_r(x-q),$$

являющийся решением интерполяционной задачи

$$h_r(l) = \delta_m(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{6}$$

Напомним явную формулу для коэффициентов $c(q)$ (см. [1, теорема 1]). Положим

$$Z = \mathcal{F}_m(\delta_m) = 1,$$

$$H(k) = \sum_{q=0}^{m-1} P_r(q)\, \omega_m^{-kq}, \qquad k \in 0 : m-1,$$

$$C(k) = \frac{Z(k)}{H(k)} = \frac{1}{H(k)}\,, \qquad k \in 0 : m-1.$$

Сигнал $c(q)$ может быть получен как обратное преобразование Фурье от сигнала C. Значения $H(k)$ вещественны в силу чётности сплайна P_r. Таким образом, сигнал $C(k)$ также вещественный, что влечёт чётность сигнала $c(q)$. Фундаментальный сплайн $h_r(x)$ является чётной функцией. Это проверяется так же, как чётность правой части формулы (5).

Ряд Фурье $h_r(x)$ имеет вид

$$\frac{a_{r,0}}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} \cos\frac{2\pi sx}{m}\,, \tag{7}$$

где

$$a_{r,s} = \frac{2}{m}\int_0^m h_r(x)\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\, dx.$$

Вычислим эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_{r,s} &= \frac{2}{m}\sum_{q=0}^{m-1} c(q) \int_0^m P_r(x-q)\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\, dx = \\ &= \frac{2}{m}\sum_{q=0}^{m-1} c(q) \int_0^m P_r(x)\, \cos\frac{2\pi s\,(x+q)}{m}\, dx = \\ &= \frac{2}{m}\sum_{q=0}^{m-1} c(q)\Big(\cos\frac{2\pi sq}{m}\int_0^m P_r(x)\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\, dx - \\ &\qquad - \sin\frac{2\pi sq}{m}\int_0^m P_r(x)\, \sin\frac{2\pi sx}{m}\, dx\Big). \end{aligned}$$

Вычитаемый интеграл равен нулю в силу чётности функции P_r. Применяя лемму 1, получаем при $s = 0$

$$a_{r,0} = \sum_{q=0}^{m-1} c(q),$$

а при $s > 0$

$$a_{r,s} = \sum_{q=0}^{m-1} c(q)\, \cos\frac{2\pi sq}{m} \left(\frac{m}{\pi s}\, \sin\frac{\pi s}{m}\right)^{2r}.$$

Значит, ряд (7) сходится равномерно, поэтому его сумма совпадает с $h_r(x)$. Кроме того, для коэффициентов ряда при $s > 0$ справедлива оценка

$$|a_{r,s}| \leqslant \frac{C_r}{s^{2r}}\,, \tag{8}$$

где

$$C_r = \left(\tfrac{m}{\pi}\right)^{2r} \sum_{q=0}^{m-1} \bigl|c(q)\bigr|.$$

Выделим начало и конец ряда (7):

$$U_r(x) = \frac{a_{r,0}}{2} + \sum_{s=1}^{\mu} a_{r,s}\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\,,$$

$$W_r(x) = \sum_{s=\mu+1}^{\infty} a_{r,s}\, \cos\frac{2\pi sx}{m}\,.$$

ЛЕММА 3. *Для натуральных r, отличных от единицы, справедливо неравенство*

$$\bigl|W_r(x)\bigr| \leqslant C \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^{r}, \qquad x \in [0, m], \tag{9}$$

где C — некоторая константа.

Доказательство. Известно (см. [1, теорема 2]), что фундаментальный сплайн $h_r(x)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \int_0^m \bigl|f^{(r)}(x)\bigr|^2\, dx \to \min, \\ f(l) = \delta_m(l), \quad l \in 0 : m-1, \\ f \in \widetilde{W}_2^r, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\widetilde{W}_2^r$ — пространство m-периодических функций, имеющих производную порядка r, суммируемую с квадратом на основном периоде $[0, m]$. Очевидно, что интерполяционный тригонометрический полином $d_m(x)$ удовлетворяет условиям задачи (10) при любом r. Поэтому справедливо неравенство

$$\int_0^m \left|h_r^{(r)}(x)\right|^2 dx \leqslant \int_0^m \left|d_m^{(r)}(x)\right|^2 dx. \tag{11}$$

Найдём явные выражения для обеих частей неравенства.

Продифференцируем ряд (7) почленно r раз:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} \left(\frac{2\pi s}{m}\right)^r \cos\left(\frac{2\pi s x}{m} + \frac{\pi r}{2}\right).$$

Этот ряд в силу оценки (8) сходится равномерно. Поэтому его сумма равна $h_r^{(r)}(x)$. Далее, в силу равенства Парсеваля для рядов Фурье (см. [3, с. 75])

$$\int_0^m \left|h_r^{(r)}(x)\right|^2 dx = \frac{m}{2} \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^2 \left(\frac{2\pi s}{m}\right)^{2r} = \frac{m}{2} \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{2r} \sum_{s=1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2\,.$$

Тригонометрический полином $d_m(x)$ имеет вид

$$d_m(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s \cos\frac{2\pi s x}{m}\,.$$

По равенству Парсеваля

$$\int_0^m \left|d_m^{(r)}(x)\right|^2 dx = \frac{m}{2} \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{2r} \sum_{s=1}^{\mu} s^{2r}\, \alpha_s^2\,.$$

На основании (11) получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2 \leqslant \sum_{s=1}^{\mu} s^{2r}\, \alpha_s^2 \leqslant \mu^{2r} \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\,. \tag{12}$$

Оценим сумму ряда $W_r(x)$:

$$\left|W_r(x)\right| \leqslant \sum_{s=\mu+1}^{\infty} |a_{r,s}| = \sum_{s=\mu+1}^{\infty} \left(s^r |a_{r,s}|\right) s^{-r}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left|W_r(x)\right|^2 \leqslant \sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2 \sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{-2r}.$$

Для первого сомножителя правой части согласно (12) справедливо неравенство

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{2r}\, a_{r,s}^2 \leqslant \mu^{2r} \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\,.$$

Для второго сомножителя имеем

$$\sum_{s=\mu+1}^{\infty} s^{-2r} = \frac{1}{(\mu+1)^{2r}} \sum_{s=\mu+1}^{\infty} \Bigl(\frac{\mu+1}{s}\Bigr)^{2r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\mu+1)^{2r}} \sum_{s=\mu+1}^{\infty} \Bigl(\frac{\mu+1}{s}\Bigr)^{2} \leqslant \frac{1}{(\mu+1)^{2r-2}}\,\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Значит,

$$\bigl|W_r(x)\bigr|^2 \leqslant \Bigl(\frac{\mu}{\mu+1}\Bigr)^{2r} \frac{\pi^2\,(\mu+1)^2}{6} \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\,.$$

Для завершения доказательства осталось извлечь корень из обеих частей последнего неравенства и положить

$$C = \frac{\pi(\mu+1)}{\sqrt{6}} \Bigl(\sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s^2\Bigr)^{1/2}.$$

$\square$

ЛЕММА 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} h_r(x) = d_m(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. По определению $h_r(x) = U_r(x) + W_r(x)$, причём из леммы 3 следует, что

$$\lim_{r\to\infty} W_r(x) = 0. \tag{13}$$

Принимая во внимание равенство (6), для $l \in 0 : m-1$ получаем

$$\lim_{r\to\infty} U_r(l) = \delta_m(l).$$

По определению $U_r(x)$ принадлежит пространству тригонометрических полиномов Π_m, поэтому, согласно лемме 2,

$$U_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} U_r(q)\, d_m(x-q).$$

Далее,

$$\lim_{r\to\infty} U_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} \delta_m(q)\, d_m(x-q) = d_m(x).$$

Воспользовавшись предельным соотношением (13), получим

$$\lim_{r\to\infty} h_r(x) = \lim_{r\to\infty} U_r(x) = d_m(x).$$

Лемма доказана. □

4°. Пусть $z(0), z(1), \ldots, z(m-1)$ — произвольные комплексные числа, $S_r(x)$ — сплайн вида (1), удовлетворяющий интерполяционным условиям (2).

ТЕОРЕМА. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, d_m(x-q).$$

Доказательство. Сплайн $S_r(x)$ можно представить в виде линейной комбинации сдвигов фундаментальных сплайнов:

$$S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, h_r(x-q).$$

В силу леммы 4

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, h_r(x-q) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, d_m(x-q).$$

Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty} S_r(x) = \sum_{q=0}^{m-1} z(q)\, d_m(x-q),$$

что и требовалось. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).

2. M. von Golitschek. *On the Convergence of Interpolating Periodic Spline Functions of High Degree* // Numer. Math. 1972. V. 19. № 2. P. 146–154.

3. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* М.: Наука, 1961. 936 с.

4. Малозёмов В. Н. *Предельные теоремы теории дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 января 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0130`).