ФРЕЙМЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ФРЕЙМОВОГО ПОТЕНЦИАЛА*

А. Б. Певный

pevnyi@syktsu.ru

28 марта 2006 г.

Излагаются основы теории фреймов в конечномерных пространствах. Приводится подробное решение задачи минимизации фреймового потенциала, основанное на идеях статьи [1].

1°. Система векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ в пространстве $\mathbb{C}^N$ при $M \geqslant N$ называется *фреймом*, если существуют положительные числа A, B, такие, что

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \bigl|\langle x, \varphi_i\rangle\bigr|^2 \leqslant B\,\|x\|^2\,, \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{1}$$

Числа A, B называются *границами фрейма.*

Введём вектор-столбцы $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{iN})^{\mathrm{T}}$ и матрицу Φ с элементами $\Phi_{ik} = \overline{\varphi}_{ik}$, $i \in 1:M$, $k \in 1:N$. Матрица $S = \Phi^*\Phi$ называется *матрицей фрейма.* (Знак $*$ обозначает эрмитово сопряжение — транспонирование плюс комплексное сопряжение.) По определению

$$S_{kl} = \sum_{i=1}^{M} \Phi^*_{ki}\,\Phi_{il} = \sum_{i=1}^{M} \varphi_{ik}\,\overline{\varphi}_{il}\,, \qquad k, l \in 1:N\,. \tag{2}$$

Поскольку

$$(\Phi\,x)_i = \sum_{k=1}^{N} \Phi_{ik}\,x_k = \sum_{k=1}^{N} x_k\,\overline{\varphi}_{ik} = \langle x, \varphi_i\rangle\,, \tag{3}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

то
$$\sum_{i=1}^{M} \left|\langle x, \varphi_i\rangle\right|^2 = \|\varPhi\, x\|^2 = \langle S\, x, x\rangle\,. \tag{4}$$
Согласно (1) эрмитова матрица S положительно определена. Точными границами фрейма являются наименьшее λ_1 и наибольшее λ_N собственные числа матрицы S, т. е. $A = \lambda_1$, $B = \lambda_N$.

2°. По коэффициентам $c_i = \langle x, \varphi_i\rangle$, $i \in 1 : M$, можно восстановить вектор x. Действительно, матрица $\varPhi^*$ состоит из столбцов $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$, поэтому
$$\varPhi^* y = \sum_{i=1}^{M} y_i\, \varphi_i\,, \qquad y \in \mathbb{C}^M. \tag{5}$$
Подставив в (5) $y = \varPhi x$, на основании (3) получим
$$S\, x = \varPhi^*\varPhi\, x = \sum_{i=1}^{M} (\varPhi\, x)_i\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i\rangle\, \varphi_i\,. \tag{6}$$
Матрица S имеет обратную S^{-1}, которая также является эрмитовой. Согласно (6)
$$x = S\,(S^{-1}x) = \sum_{i=1}^{M} \langle S^{-1}x, \varphi_i\rangle\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{M} \langle x, S^{-1}\varphi_i\rangle\, \varphi_i\,.$$
Обозначим $\widehat{\varphi}_i = S^{-1}\varphi_i$. Тогда
$$x = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \widehat{\varphi}_i\rangle\, \varphi_i\,, \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{7}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Векторы $\{\widehat{\varphi}_i\}_{i=1}^M$ образуют фрейм с матрицей фрейма $\widehat{S} = S^{-1}$.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (4). Запишем
$$\sum_{i=1}^{M} \left|\langle x, \widehat{\varphi}_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{M} \left|\langle S^{-1}x, \varphi_i\rangle\right|^2 = \|\varPhi\, S^{-1}x\|^2 = \\ = \langle \varPhi\, S^{-1}x, \varPhi\, S^{-1}x\rangle = \langle S^{-1}x, x\rangle\,. \tag{8}$$
У эрмитовой матрицы S^{-1} наименьшее и наибольшее собственные числа равны соответственно $1/\lambda_N$ и $1/\lambda_1$. Поэтому система $\{\widehat{\varphi}_i\}_{i=1}^M$ является фреймом с точными границами $\widehat{A} = 1/\lambda_N$, $\widehat{B} = 1/\lambda_1$.

Из (8) следует, что $S^{-1} = \widehat{S}$. Вычисление $\widehat{S}$ можно провести и непосредственно. Так как $(\widehat{\Phi})^* = S^{-1}\,\Phi^*$, то

$$\widehat{S} := (\widehat{\Phi})^*\widehat{\Phi} = S^{-1}\,\Phi^*\Phi\,S^{-1} = S^{-1}\,.$$

Предложение доказано. □

Фрейм $\{\widehat{\varphi}_i\}_{i=1}^M$ называется *каноническим двойственным фреймом.* У фрейма $\{\widehat{\varphi}_i\}_{i=1}^M$ в свою очередь есть канонический двойственный фрейм, совпадающий с исходным фреймом $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$. Отсюда, в частности, следует, что наряду с (7) справедливо разложение

$$x = \sum_{i=1}^M \langle x, \varphi_i\rangle\,\widehat{\varphi}_i\,, \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{9}$$

3°. Согласно (3) формулу (9) можно переписать так:

$$x = \sum_{i=1}^M (\Phi\,x)_i\,\widehat{\varphi}_i = (\widehat{\Phi})^*\Phi\,x\,, \qquad x \in \mathbb{C}^N.$$

Это значит, что $(\widehat{\Phi})^*\Phi = I_N$. Кроме $(\widehat{\Phi})^*$, могут существовать и другие матрицы $(\widetilde{\Phi})^*$ со столбцами $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_M$, такие, что

$$(\widetilde{\Phi})^*\Phi = I_N\,. \tag{10}$$

Если при этом матрица $\widetilde{S} = (\widetilde{\Phi})^*\widetilde{\Phi}$ положительно определена, то система $\{\widetilde{\varphi}_i\}_{i=1}^M$ называется *двойственным фреймом* по отношению к $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$.

Из (10) следует, что для любого двойственного фрейма $\{\widetilde{\varphi}_i\}_{i=1}^M$ справедливо разложение

$$x = (\widetilde{\Phi})^*\Phi\,x = \sum_{i=1}^M \langle x, \varphi_i\rangle\,\widetilde{\varphi}_i\,, \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{11}$$

Эрмитово сопряжение обеих частей (10) приводит к формуле $\Phi^*\widetilde{\Phi} = I_N$ и к разложению

$$x = \Phi^*\widetilde{\Phi}\,x = \sum_{i=1}^M \langle x, \widetilde{\varphi}_i\rangle\,\varphi_i\,, \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{12}$$

Итак, двойственный фрейм определяется матрицей $\widetilde{\Phi}$. Чтобы найти все двойственные фреймы, нужно найти все матрицы $\widetilde{\Phi}$, удовлетворяющие соотношению (10), и такие, что матрица $\widetilde{S} = (\widetilde{\Phi})^*\widetilde{\Phi}$ является положительно определённой.

Избыточные разложения (11) и (12) привлекли внимание многих исследователей, занимающихся цифровой обработкой сигналов. Фреймовые разложения более устойчивы к потерям при передаче коэффициентов. Они могут служить инструментом для исправления ошибок, допущенных при передаче по каналам связи.

4°. Рассмотрим произвольные векторы $\varphi_i \in \mathbb{C}^N$, $i \in 1:M$, $M \geqslant N$, не предполагая, что они образуют фрейм. Как и в п. 1°, введём матрицу Φ с элементами $\Phi_{ik} = \overline{\varphi}_{ik}$, $i \in 1:M$, $k \in 1:N$, и матрицу $S = \Phi^*\Phi$. Поскольку S — неотрицательно определённая эрмитова матрица, то все её собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ вещественны и неотрицательны.

Известно, что сумма собственных чисел λ_k равна сумме диагональных элементов матрицы S. Последняя называется *следом* матрицы S и обозначается $\mathrm{tr}(S)$. В силу (2)

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = \mathrm{tr}(S) = \sum_{k=1}^{N} S_{kk} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} |\varphi_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i\|^2 \,. \tag{13}$$

Выражение

$$\mathrm{P}(\Phi) = \mathrm{P}(\varphi_1, \ldots, \varphi_M) = \sum_{i,j=1}^{M} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|^2$$

называется *фреймовым потенциалом.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{P}(\Phi) = \mathrm{tr}(S^2)\,. \tag{14}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{P}(\Phi) = \sum_{i,j=1}^{M} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{ik}\, \overline{\varphi}_{jk} \sum_{l=1}^{N} \varphi_{jl}\, \overline{\varphi}_{il}\,. \tag{15}$$

Далее, поскольку S — эрмитова матрица, то

$$S_{lk} = \overline{S}_{kl}\,, \qquad (S^2)_{kk} = \sum_{l=1}^{N} S_{kl} \overline{S}_{kl}\,.$$

Отсюда в силу (2) следует, что

$$\mathrm{tr}(S^2) = \sum_{k,l=1}^{N} S_{kl}\, \overline{S}_{kl} = \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \varphi_{ik}\, \overline{\varphi}_{il} \sum_{j=1}^{M} \overline{\varphi}_{jk}\, \varphi_{jl}\,. \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), приходим к (14). Предложение доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любого набора векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$ из $\mathbb{C}^N$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{P}(\varPhi) \geqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i\|^2\right)^2. \tag{17}$$

Доказательство. Собственными числами матрицы S^2 являются $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_N^2$, так что

$$\mathrm{tr}(S^2) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\,. \tag{18}$$

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \leqslant \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\right)^{1/2}. \tag{19}$$

На основании (14), (18) и (19) получим

$$\mathrm{P}(\varPhi) \geqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k\right)^2.$$

Остаётся воспользоваться формулой (13). Предложение доказано. □

5°. Равенство в (17) достигается тогда и только тогда, когда неравенство (19) выполняется как равенство, что возможно лишь при $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N =: \lambda$. В этом случае $S = \lambda I_N$ и согласно (4)

$$\sum_{i=1}^{M} \bigl|\langle x, \varphi_i\rangle\bigr|^2 = \lambda\,\|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^N. \tag{20}$$

Выполнение условия (20) означает, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ является *жёстким фреймом* (с константой λ). Таким образом, неравенство (17) обращается в равенство на жёстких фреймах и только на них.

6°. Приведём конструкцию, позволяющую получать жёсткие фреймы с константой $\lambda > 0$ в неограниченном количестве. Возьмём ортогональную $(M \times M)$-матрицу F со столбцами $F_1, \ldots, F_M$, у которых $\|F_k\|^2 = \lambda$ при всех $k \in 1 : M$. Из первых N столбцов составим $(M \times N)$-матрицу $\varPhi$. Рассмотрим сопряжённую матрицу Φ^* размера $N \times M$ и её столбцы обозначим $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$. Система $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ образует жёсткий фрейм с константой λ, поскольку

$$(\Phi^*\Phi)_{ik} = \sum_{l=1}^{M} \Phi^*_{il}\, \Phi_{lk} = \sum_{l=1}^{M} \Phi_{lk}\, \overline{\Phi}_{li} =$$
$$= \langle F_k, F_i \rangle = \begin{cases} \lambda & \text{при } k = i\,, \\ 0 & \text{при } k \neq i\,. \end{cases}$$

Указанная конструкция имеет общий характер. Пусть $S = \Phi^*\Phi$ — матрица жёсткого фрейма с константой $\lambda > 0$. Покажем, что с помощью добавления $M - N$ столбцов от матрицы Φ можно перейти к ортогональной $(M \times M)$-матрице F, у которой квадрат нормы каждого столбца равен λ.

По условию $\Phi^*\Phi = \lambda\, I_N$, так что столбцы матрицы Φ ортогональны и квадрат нормы каждого из них равен λ. Эти столбцы можно дополнить $M - N$ столбцами до ортогонального базиса в $\mathbb{C}^M$, причём так, чтобы квадрат нормы новых столбцов также равнялся λ. Расширенная матрица и будет требуемой матрицей F.

7°. Обозначим через Ω множество наборов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_M\}$ векторов из $\mathbb{C}^N$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i\|^2 = b\,.$$

Здесь $b > 0$ — фиксированное число. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\mathrm{P}(\varphi_1, \ldots, \varphi_M) \to \min_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_M\} \in \Omega}. \tag{21}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Минимальное значение потенциала* P *на множестве* Ω *равно* b^2/N. *Множество решений задачи* (21) *совпадает с множеством жёстких фреймов с константой* b/N.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_1^0, \ldots, \varphi_M^0\}$ — жёсткий фрейм с константой b/N. Тогда матрица фрейма имеет вид $S = \frac{b}{N}\, I_N$. Согласно (13)

$$\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i^0\|^2 = \mathrm{tr}(S) = b\,,$$

т. е. $\{\varphi_1^0, \ldots, \varphi_M^0\} \in \Omega$. При этом в силу (14)

$$\mathrm{P}(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_M^0) = \mathrm{tr}(S^2) = \frac{b^2}{N}\,.$$

В то же время, на основании (17) для любого набора $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ из Ω справедливо неравенство

$$\mathrm{P}(\varphi_1, \dots, \varphi_M) \geqslant \frac{b^2}{N}\,.$$

Значит, минимальное значение потенциала в задаче (21) равно b^2/N и достигается на указанных выше жёстких фреймах. Покажем, что только на них.

Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\} \in \Omega$ и $\mathrm{P}(\varphi_1, \dots, \varphi_M) = b^2/N$. Как обычно, собственные числа матрицы $S = \varPhi^*\varPhi$ обозначим $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Согласно (14), (18), (19) и (13) имеем

$$\frac{b^2}{N} = \mathrm{P}(\varphi_1, \dots, \varphi_M) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 \geqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k\right)^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i\|^2\right)^2 = \frac{b^2}{N}\,. \qquad (22)$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_N =: \lambda$, $S = \lambda\, I_N$ и в силу (20)

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 = \lambda \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^N.$$

Соотношения (22) приводят также к равенству $N\lambda^2 = b^2/N$. Ввиду неотрицательности λ получаем $\lambda = b/N$. Таким образом, набор $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ является жёстким фреймом с константой b/N.

Предложение доказано. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.