БЫСТРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ*

В. Н. Малозёмов

malv@gamma.math.spbu.ru

30 ноября 2004 г.

Детально анализируются три примера быстрого преобразования вектора коэффициентов алгебраического полинома, представленного в некотором базисе, в вектор коэффициентов того же полинома в другом базисе. Преобразования производятся в одном массиве («на месте»).

1°. Первый (базовый) пример связан с обобщенной схемой Горнера.

ПРИМЕР 1. *Алгебраический полином*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,(x-c)^{n-k}\,, \tag{1}$$

где c — произвольное вещественное число, представить в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}\, x^{n-k}\,.$$

Коэффициенты $b_{n0}, b_{n1}, \ldots, b_{nn}$ записать в массив $a[0..n]$.

УКАЗАНИЕ. Для последовательности полиномов

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{i} a[k]\,(x-c)^{i-k}$$

справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} &P_i(x) = (x-c)\,P_{i-1}(x) + a[i]\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,;\\ &P_0(x) \equiv a[0]\,. \end{aligned} \tag{2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

При этом $P_n(x) = P(x)$. Пусть

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{i} b_{ik}\, x^{i-k}\,.$$

В частности,

$$P_0(x) = b_{00} = a[0] \tag{3}$$

и

$$P(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}\, x^{n-k}.$$

Требуется вычислить коэффициенты $b_{n0}, b_{n1}, \ldots, b_{nn}$.

Согласно (2) имеем

$$\sum_{k=0}^{i} b_{ik}\, x^{i-k} = \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-1,k}\, x^{i-k} - c \sum_{k=1}^{i} b_{i-1,k-1}\, x^{i-k} + a[i]\,.$$

Отсюда следует, что при $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} b_{ik} &= b_{i-1,k} - c\, b_{i-1,k-1}\,, \quad k = 1, \ldots, i-1\,; \\ b_{ii} &= a[i] - c\, b_{i-1,i-1}\,, \\ b_{i0} &= b_{i-1,0}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Положив $b_{i-1,i} = a[i]$, объединим первые две строчки из (4):

$$b_{ik} = b_{i-1,k} - c\, b_{i-1,k-1}\,, \qquad k = 1, \ldots, i\,.$$

Третья строчка из (4) вместе с (3) приводят к равенству

$$b_{i0} = a[0]\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Для матрицы коэффициентов $\{b_{ik}\}$ получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} b_{ik} &= b_{i-1,k} - c\, b_{i-1,k-1}\,, && k = i, i-1, \ldots, 1\,; \\ b_{i-1,i} &= a[i]\,, && i = 1, \ldots, n\,; \\ b_{i0} &= a[0]\,, && i = 0, 1, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{5}$$

В матрице $\{b_{ik}\}$ известен столбец с индексом 0 и верхняя наклонная строка. Нужно вычислить элементы нижней строки $b_{n0}, b_{n1}, \ldots, b_{nn}$. На рис. 1, 2 представлены две схемы вычислений по формулам (5).

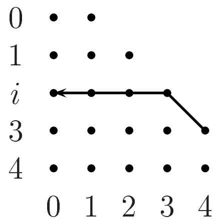

Рис. 1.

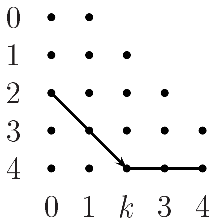

Рис. 2.

Линией соединены позиции элементов матрицы $\{b_{ik}\}$, которые будут находиться в массиве $a[0..n]$ на i-м шаге в случае схемы 1 и на k-м шаге в случае схемы 2. Стрелкой указано направление пересчета элементов массива $a[0..n]$.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ

```
for i := 1 to n do
for k := i downto 1 do
   a[k] := a[k] − c ∗ a[k−1]
```

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ

```
for k := n downto 1 do
for i := 1 to k do
   a[i] := a[i] − c ∗ a[i−1]
```

После работы обеих программ $a[k] = b_{nk}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

2°. Поставим обратную задачу: *алгебраический полином*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\, x^{n-k}$$

представить в виде (1). Теперь в рекуррентном массиве $\{b_{ik}\}$ известны нижняя строка и столбец с индексом 0. Требуется восстановить верхнюю наклонную строку.

Воспользуемся обращением рекуррентного соотношения (5): при $i = n, n-1, \ldots, 1$

$$\begin{aligned} b_{i-1,k} &= b_{ik} + c\, b_{i-1,k-1}\,, \quad && k = 1, \ldots, i\,; \\ b_{i-1,0} &= a[0]\,; && \\ b_{nk} &= a[k]\,, && k = 0, 1, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Проведя вычисления по этим формулам, придем к представлению

$$P(x) = b_{00}\,(x-c)^n + \sum_{i=1}^{n} b_{i-1,i}\,(x-c)^{n-i}\,.$$

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ

```
for i := n downto 1 do
for k := 1 to i do
   a[k] := a[k] + c * a[k−1]
```

Это решение соответствует обращению схемы 1 (рис. 1).

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ

```
for k := 1 to n do
for i := k downto 1 do
   a[i]:= a[i] + c * a[i−1]
```

Это решение соответствует обращению схемы 2 (рис. 2).

После работы обеих программ $a[0] = b_{00}$ и $a[i] = b_{i-1,i}$ при $i = 1, \ldots, n$.

3°. В следующем примере используются полиномы Чебышева $T_k(x)$, определяемые с помощью рекуррентного соотношения

$$T_k(x) = 2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,;$$
$$T_0(x) \equiv 1\,, \qquad T_1(x) = x\,.$$

ПРИМЕР 2. *Алгебраический полином*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,T_k(x) \tag{6}$$

представить в виде

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{ii}\,x^i\,.$$

Коэффициенты $b_{00}, b_{11}, \ldots, b_{nn}$ *записать в массив* $a[0..n]$.

УКАЗАНИЕ. Построим последовательность полиномов

$$P_i(x) = \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\,T_{k-i-1}(x)\,, \qquad i = -1, 0, 1, \ldots, n-2\,,$$

исходя из условий

$$\begin{aligned} &P_{i-1}(x) = b_{ii} + x\,P_i(x)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2\,; \\ &P_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,T_k(x)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда

$$P(x) = P_{-1}(x) = b_{00} + x\,P_0(x) = b_{00} + x\,\bigl(b_{11} + x\,P_1(x)\bigr) = \\ = b_{00} + b_{11}\,x + x^2\,P_1(x) = \cdots = \sum_{i=0}^{n-2} b_{ii}\,x^i + x^{n-1}\,P_{n-2}(x)\,.$$

Поскольку $P_{n-2}(x) = b_{n-2,n-1} + b_{n-2,n}\,x$, то, положив $b_{n-1,n-1} = b_{n-2,n-1}$, $b_{nn} = b_{n-2,n}$, придём к требуемому представлению

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{ii}\,x^i\,.$$

Выведем рекуррентное соотношение для коэффициентов b_{ik}. Согласно (7) имеем

$$\sum_{k=i}^{n} b_{i-1,k}\,T_{k-i} = b'_{ii} + x\left(b'_{i,i+1} + 2\sum_{k=i+2}^{n} b'_{ik}\,T_{k-i-1}\right).$$

Здесь $b'_{ii} = b_{ii}$, $b'_{i,i+1} = b_{i,i+1}$ и $2\,b'_{ik} = b_{ik}$ при $k = i+2,\ldots,n$. Воспользуемся равенством $2x\,T_{k-i-1} = T_{k-i} + T_{k-i-2}$. Получим

$$\sum_{k=i}^{n} b_{i-1,k}\,T_{k-i} = b'_{ii}\,T_0 + b'_{i,i+1}\,T_1 + \sum_{k=i+2}^{n} b'_{ik}\,(T_{k-i} + T_{k-i-2}) = \\ = \sum_{k=i}^{n} b'_{ik}\,T_{k-i} + \sum_{k=i}^{n-2} b'_{i,k+2}\,T_{k-i}\,.$$

Отсюда следует, что

$$b_{i-1,n-1} = b'_{i,n-1}\,, \qquad b_{i-1,n} = b'_{in}\,, \\ b_{i-1,k} = b'_{ik} + b'_{i,k+2}\,, \qquad k = i,\ldots,n-2\,.$$

Последнее равенство после замены $k+2$ на k примет вид

$$b_{i-1,k-2} = b'_{i,k-2} + b'_{ik}\,, \qquad k = i+2,\ldots,n\,. \tag{8}$$

Теперь можно записать рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить коэффициенты полинома $P_i(x)$ по коэффициентам полинома $P_{i-1}(x)$ при $i = 0,1,\ldots,n-2$:

$$b'_{i,k-2} = b_{i-1,k-2} - b'_{ik}\,, \qquad k = n, n-1,\ldots,i+2\,; \\ b'_{in} = b_{i-1,n}\,, \qquad b'_{i,n-1} = b_{i-1,n-1}\,;$$

$$b_{ii} = b'_{ii}\,, \qquad b_{i,i+1} = b'_{i,i+1}\,;$$
$$b_{ik} = 2\,b'_{ik}\,, \qquad k = i+2, \ldots, n\,;$$

$$b_{n-1,n-1} = b_{n-2,n-1}\,, \qquad b_{nn} = b_{n-2,n}\,;$$
$$b_{-1,k} = a[k]\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

В матрице $\{b_{ik}\}$ известна строка с индексом -1. Нужно вычислить элементы наклонной строки $b_{00}, b_{11}, \ldots, b_{nn}$. Схема вычислений представлена на рис. 3.

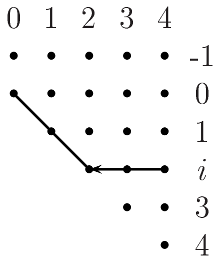

Рис. 3.

РЕШЕНИЕ

```
for i := 0 to n−2 do
  for k := n downto i+2 do begin
    a[k−2] := a[k−2] − a[k];
    a[k] := 2∗a[k]
  end
```

Если заменить i+2 на i, то получим более элегантный вариант программы:

```
for i := 2 to n do
  for k := n downto i do begin
    a[k−2] := a[k−2] − a[k];
    a[k] := 2∗a[k]
  end
```

4°. Решим обратную задачу: *алгебраический полином*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,x^k$$

представить в виде (6). Теперь в рекуррентном массиве $\{b_{ik}\}$ известна нижняя наклонная строка. Требуется восстановить элементы строки с индексом -1.

В силу (8) схема вычислений будет такой: при $i = n-2, n-1, \ldots, 0$

$$b'_{ii} = b_{ii}\,, \qquad b'_{i,i+1} = b_{i,i+1}\,;$$
$$b'_{ik} = b_{ik}/2\,, \qquad k = i+2, \ldots, n\,;$$

$$b_{i-1,k-2} = b'_{i,k-2} + b'_{ik}\,, \qquad k = i+2, \ldots, n\,;$$
$$b_{i-1,n-1} = b'_{i,n-1}\,, \qquad b_{i-1,n} = b'_{in}\,;$$

$$b_{n-2,n} = b_{nn}\,, \qquad b_{n-2,n-1} = b_{n-1,n-1}\,;$$
$$b_{kk} = a[k]\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

РЕШЕНИЕ

```
for i := n  downto 2 do
   for k := i  to n do begin
      a[k]  := 0.5*a[k];
      a[k−2] := a[k−2] + a[k]
   end
```

В идейном плане пример 2 вместе с его обращением и программами рассмотрен в [1, с. 253–264]. Там же исследован вопрос о погрешности вычислений.

5°. Полиномы Чебышева второго рода $U_k(x)$ определяются тем же рекуррентным соотношением, что и $T_k(x)$, но другими начальными условиями:

$$U_k(x) = 2x\,U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,;$$
$$U_0(x) \equiv 1\,, \qquad U_1(x) = 2x\,.$$

ПРИМЕР 3. *Алгебраический полином*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,U_k(x) \tag{9}$$

привести к виду

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{ii}\,(x-c)^i\,.$$

Коэффициенты $b_{00}, b_{11}, \ldots, b_{nn}$ *записать в массив* $a[0..n]$.

УКАЗАНИЕ. Построим последовательность полиномов

$$P_i(x) = \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\,U_{k-i-1}(x)\,, \qquad i = -1, 0, 1, \ldots, n-2\,,$$

исходя из условий

$$\begin{aligned} &P_{i-1}(x) = b_{ii} + (x-c)\,P_i(x)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2\,; \\ &P_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,U_k(x)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P(x) = P_{-1}(x) &= b_{00} + (x-c)\,P_0(x) = \\
&= b_{00} + (x-c)\,\bigl[b_{11} + (x-c)\,P_1(x)\bigr] = \\
&= b_{00} + b_{11}\,(x-c) + (x-c)^2\,P_1(x) = \\
&= \cdots = \sum_{i=0}^{n-2} b_{ii}\,(x-c)^i + (x-c)^{n-1}\,P_{n-2}(x)\,.
\end{aligned}$$

Поскольку $P_{n-2}(x) = b_{n-2,n-1} + 2x\,b_{n-2,n} = b_{n-2,n-1} + 2c\,b_{n-2,n} + 2\,b_{n-2,n}(x-c)$, то, положив

$$b_{n-1,n-1} = b_{n-2,n-1} + 2c\,b_{n-2,n}\,, \qquad b_{nn} = 2\,b_{n-2,n}\,,$$

придем к требуемому представлению

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{ii}\,(x-c)^i\,.$$

Выведем рекуррентное соотношение для коэффициентов b_{ik}. Согласно (10) имеем

$$\sum_{k=i}^{n} b_{i-1,k}\,U_{k-i} = b'_{ii} + (x-c)\left[2\,b'_{i,i+1} + 2\sum_{k=i+2}^{n} b'_{ik}\,U_{k-i-1}\right].$$

Здесь $b'_{ii} = b_{ii}$ и $2\,b'_{ik} = b_{ik}$ при $k = i+1,\dots,n$. Воспользуемся равенством $2x\,U_{k-i-1} = U_{k-i} + U_{k-i-2}$. Получим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} b_{i-1,k}\,U_{k-i} &= (b'_{ii} - 2c\,b'_{i,i+1})\,U_0 + b'_{i,i+1}\,U_1 + \\
&+ \sum_{k=i+2}^{n} b'_{ik}\,(U_{k-i} + U_{k-i-2}) - 2c\sum_{k=i+2}^{n} b'_{ik}\,U_{k-i-1} = \\
&= (b'_{ii} - 2c\,b'_{i,i+1})\,U_0 + b'_{i,i+1}\,U_1 + \sum_{k=i+2}^{n} b'_{ik}\,U_{k-i} + \\
&+ \sum_{k=i}^{n-2} b'_{i,k+2}\,U_{k-i} - 2c\sum_{k=i+1}^{n-1} b'_{i,k+1}\,U_{k-i}\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$b_{i-1,n} = b'_{in}\,, \qquad b_{i-1,n-1} = b'_{i,n-1} - 2c\,b'_{in}\,;$$

$$
\begin{aligned}
b_{i-1,k} &= b'_{ik} - 2c\, b'_{i,k+1} + b'_{i,k+2}\,, \qquad k = i+2, \ldots, n-2\,;\\
b_{i-1,i+1} &= b'_{i,i+1} - 2c\, b'_{i,i+2} + b'_{i,i+3}\,,\\
b_{i-1,i} &= b'_{ii} - 2c\, b'_{i,i+1} + b'_{i,i+2}\,.
\end{aligned}
$$

Последние три строчки можно объединить:

$$b_{i-1,k} = b'_{ik} - 2c\, b'_{i,k+1} + b'_{i,k+2}\,, \qquad k = i, \ldots, n-2\,.$$

После замены $k+2$ на k приходим к равенству

$$b_{i-1,k-2} = b'_{i,k-2} - 2c\, b'_{i,k-1} + b'_{ik}\,, \qquad k = i+2, \ldots, n\,. \tag{11}$$

Теперь можно записать рекуррентные формулы, позволяющие вычислить коэффициенты полинома $P_i(x)$ по коэффициентам полинома $P_{i-1}(x)$ при $i = 0, 1, \ldots, n-2$:

$$
\begin{gathered}
b'_{in} = b_{i-1,n}\,, \qquad b'_{i,n-1} = b_{i-1,n-1} + 2c\, b'_{in}\,;\\
b'_{i,k-2} = b_{i-1,k-2} + 2c\, b'_{i,k-1} - b'_{ik}\,, \qquad k = n, n-1, \ldots, i+2\,;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{ii} &= b'_{ii}\,,\\
b_{ik} &= 2\, b'_{ik}\,, \quad k = n, n-1, \ldots, i+1\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
b_{n-1,n-1} = b_{n-2,n-1} + 2c\, b_{n-2,n}\,, \qquad b_{nn} = 2\, b_{n-2,n}\,;\\
b_{-1,k} = a[k]\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,.
\end{gathered}
$$

Схема вычислений такая же, как в примере 2 (см. рис. 3).

РЕШЕНИЕ

```
u := 2*c;
for i := 2 to n+1 do begin
   a[n−1] := a[n−1] + u * a[n];
   for k := n downto i do begin
      a[k−2] := a[k−2] + u * a[k−1] − a[k];
      a[k] := 2*a[k]
   end;
   a[i−1] := 2*a[i−1]
end
```

6°. Рассмотрим обратную задачу: *алгебраческий полином*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a[k]\,(x-c)^k$$

представить в виде (9). В этом случае в рекуррентном массиве $\{b_{ik}\}$ известна нижняя наклонная строка. Нужно восстановить элементы строки с индексом -1.

Формула (11) приводит к следующей схеме вычислений: при $i = n-2, n-1, \ldots, 0$

$$\begin{gathered}
b'_{ii} = b_{ii}\,; \\
b'_{ik} = b_{ik}/2\,, \quad k = i+1, \ldots, n\,; \\
b_{i-1,k-2} = b'_{i,k-2} - 2c\, b'_{i,k-1} + b'_{ik}\,, \qquad k = i+2, \ldots, n\,; \\
b_{i-1,n-1} = b'_{i,n-1} - 2c\, b'_{in}\,, \qquad b_{i-1,n} = b'_{in}\,; \\
b_{n-2,n} = b_{nn}/2\,; \qquad b_{n-2,n-1} = b_{n-1,n-1} - 2c\, b_{n-2,n}\,; \\
b_{kk} = a[k]\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,.
\end{gathered}$$

РЕШЕНИЕ

```
u := 2*c;
for i := n+1 downto 2 do begin
    a[i-1] := 0.5*a[i-1];
    for k := i to n do begin
        a[k] := 0.5*a[k];
        a[k-2] := a[k-2] - u * a[k-1] + a[k]
    end;
    a[n-1] := a[n-1] - u * a[n]
end
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* Пер. с польского. М.: Наука, 1983. 384 с.