ПРОЕКТИВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

19 февраля 2011 г.

1°. Пусть $N = mn$, где m и n — натуральные числа, отличные от единицы. Напомним данное в [1] определение нормализованных дискретных N-периодических B-сплайнов. B-сплайн первого порядка на основном периоде $0 : N-1$ задаётся явно

$$\widetilde{Q}_{1,n}(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n : N-n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N-n+1 : N-1. \end{cases}$$

Нормализованные B-сплайны более высоких порядков вводятся с помощью циклической свёртки

$$\widetilde{Q}_{\nu,n} = \tfrac{1}{n}(\widetilde{Q}_{1,n} * \widetilde{Q}_{\nu-1,n}), \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Для любого натурального ν значения B-сплайна $\widetilde{Q}_{\nu,n}$ неотрицательны и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{\nu,n}(j - pn) = 1, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Пусть фиксировано натуральное число r. Дискретный периодический сплайн порядка r с векторными коэффициентами определяется формулой

$$\mathbf{S}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j - pn)\, \mathbf{a}(p), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где $\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \ldots, \mathbf{a}(m-1)$ — векторы из пространства $\mathbb{R}^d$, называемые *полюсами*.

В [1] показано, что дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании. Соединим отрезками пары соседних точек сплайна $\mathbf{S}(j)$, $\mathbf{S}(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, лежащую внутри выпуклой оболочки полюсов. Изменяя положение полюсов, можно добиться желаемой формы ломаной.

2°. Пусть заданы полюсы $\mathbf{a}(0), \mathbf{a}(1), \ldots, \mathbf{a}(m-1)$ и положительные вещественные числа $w(0), w(1), \ldots, w(m-1)$, называемые *весами*. Припишем каждому полюсу $\mathbf{a}(p)$ дополнительную координату, равную единице, и умножим полученный вектор на $w(p)$. Придём к новому набору полюсов в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$:
$$\widehat{a}(p) = \big(w(p)\,\mathbf{a}(p), w(p)\big), \quad p \in 0 : m-1.$$
По полюсам $\widehat{a}(p)$ построим дискретный периодический сплайн
$$\widehat{S}(j) = \bigg(\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)\,\mathbf{a}(p),\ \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)\bigg), \quad j \in \mathbb{Z}.$$
Для каждого $j \in 0 : N-1$ спроецируем точку $\widehat{S}(j)$ на гиперплоскость
$$\big\{(\mathbf{x}, 1) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\big\},$$
используя центральную проекцию с центром в начале координат. Алгебраически эта операция выражается делением всех компонент вектора $\widehat{S}(j)$ на последнюю. Отбросим последнюю (равную единице) координату в полученном векторе и обозначим результат через $\mathbf{R}(j)$:
$$\mathbf{R}(j) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)\,\mathbf{a}(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn)\,w(p)}. \tag{3}$$
Для проверки корректности определения необходимо удостовериться, что знаменатель дроби отличен от нуля. Действительно, согласно тождеству (1) знаменатель является выпуклой комбинацией весов $w(p)$. Но все веса положительны, поэтому их выпуклая комбинация также положительна. Формула (3) определяет вектор-функцию $\mathbf{R}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$, периодичную с периодом N. Назовём эту функцию *проективным дискретным периодическим сплайном порядка* r, построенным по полюсам $\mathbf{a}(p)$ с весами $w(p)$.

Использованная здесь геометрическая идея позаимствована из [2, с. 209], где с её помощью вводились проективные кривые Безье.

Рассмотрим случай, когда все веса $w(p)$ равны единице. С учётом равенства (1) проективный сплайн $\mathbf{R}(j)$ примет вид (2). Таким образом, обычные дискретные периодические сплайны являются частным случаем проективных.

Проективные дискретные периодические сплайны можно использовать для построения замкнутых ломаных. Соединяя соседние точки сплайна $\mathbf{R}(j)$, $\mathbf{R}(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$ отрезками, получим замкнутую ломаную. Управлять формой ломаной можно меняя как полюсы, так и соответствующие им веса.

ПРИМЕР 1. Пусть $m = 4$, $n = 10$, $r = 2$ и полюсы расположены в вершинах квадрата. На рис. 1 изображена ломаная, определяемая проективным дискретным периодическим сплайном, все веса которого равны единице. На рис. 2 показана ломаная, полученная после изменения одного из весов с 1 на 3. На рисунках кружками отмечены полюсы, рядом с ними приведены соответствующие им веса.

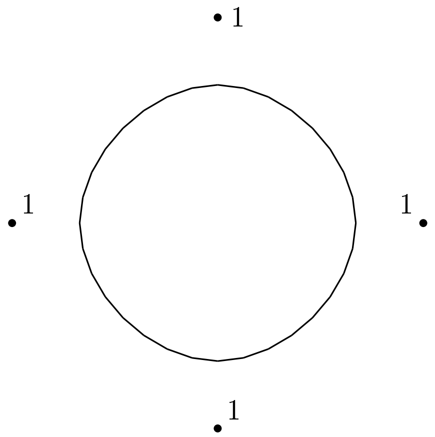

Рис. 1

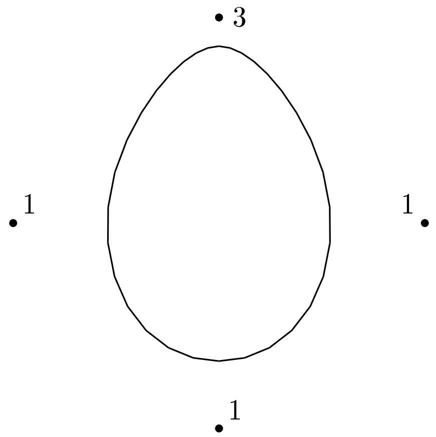

Рис. 2

3°. Пусть фиксированы веса $w(p)$, $p \in 0 : m-1$, и заданы векторы $\mathbf{b}(0), \mathbf{b}(1), \ldots, \mathbf{b}(m-1)$. Рассмотрим интерполяционную задачу: найти полюсы $\mathbf{a}(p)$, при которых проективный сплайн вида (3) удовлетворяет условиям

$$\mathbf{R}(ln) = \mathbf{b}(l), \quad l \in 0 : m-1. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 1. *Интерполяционная задача* (4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Будем считать, что наборы $\mathbf{a}(p)$, $w(p)$ и $\mathbf{b}(p)$ периодически продолжены на все целые p с периодом m. Введём функцию

$$h_n(p) := \widetilde{Q}_{r,n}(pn), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что $h_n(p)$ — m-периодическая функция.

Подставим в равенство (4) выражение для $\mathbf{R}(j)$:

$$\frac{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(ln-pn)\, w(p)\, \mathbf{a}(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(ln-pn)\, w(p)} = \mathbf{b}(p).$$

Перенесём знаменатель в правую часть и воспользуемся определением функции $h_n(p)$:

$$\sum_{p=0}^{m-1} h_n(l-p)\, w(p)\, \mathbf{a}(p) = \mathbf{b}(p) \sum_{p=0}^{m-1} h_n(l-p)\, w(p).$$

Перепишем полученное равенство в компактной форме:

$$(w\,\mathbf{a}) * h_n = \mathbf{b} \cdot (h_n * w). \tag{5}$$

Для произвольных m-периодических вектор-функции $\mathbf{x}(j)$ и скалярной функции $y(j)$ справедливо тождество

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{x} * y) = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})\mathcal{F}_m(y). \tag{6}$$

Здесь свёртка вектор-функции со скалярной, ДПФ вектор-функции и произведение вектор-функции на скалярную вычисляются покомпонентно. Справедливость формулы (6) следует из теоремы о свёртке [3, с. 38].

Применим ДПФ к обеим частям равенства (5) и воспользуемся тождеством (6):

$$\mathcal{F}_m(w\,\mathbf{a})\, H_n = \mathcal{F}_m\bigl(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)\bigr),$$

где $H_n = \mathcal{F}_m(h_n)$. Известно (см. доказательство теоремы 1 в [4]), что значения $H_n(k)$ положительны. Поделив на H_n, придём к равенству

$$\mathcal{F}_m(w\,\mathbf{a}) = \frac{\mathcal{F}_m\bigl(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)\bigr)}{H_n}.$$

Осталось применить обратное ДПФ к обеим частям и поделить на положительную функцию w:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{w}\, \mathcal{F}_m^{-1}\biggl(\frac{\mathcal{F}_m\bigl(\mathbf{b} \cdot (h_n * w)\bigr)}{H_n}\biggr). \tag{7}$$

В силу эквивалентности проведённых преобразований формула (7) задаёт набор полюсов, являющий единственным решением задачи (4). $\square$

Обратимся к геометрической интерпретации теоремы 1. Пусть заданы точки интерполяции и веса. Ломаная, определяемая интерполяционным сплайном, проходит через точки интерполяции. Меняя веса, можно регулировать форму ломаной.

ПРИМЕР 2. Пусть $r = 2$, $m = 6$, $n = 15$. На рисунках 3 и 4 показаны ломаные, задаваемые интерполяционными сплайнами, построенными по одним и тем же точкам интерполяции, но с разными весами. Точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ изображены кружками, рядом приведены веса $w(p)$.

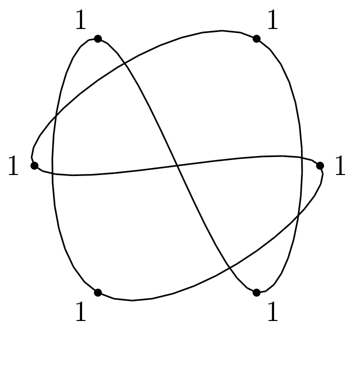

Рис. 3

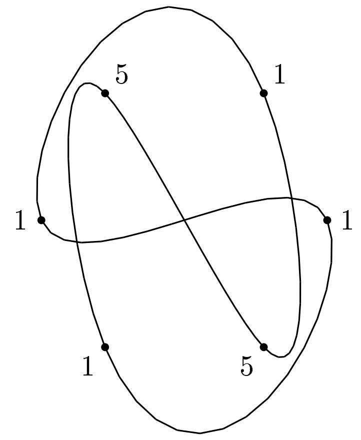

Рис. 4

4°. Пусть фиксированы натуральные числа r и $m \geqslant 2$, точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ и веса $w(p)$. Для каждого натурального n, отличного от единицы, построим проективный интерполяционный сплайн $\mathbf{R}_n(j)$. Исследуем поведение множества $\{\mathbf{R}_n(j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ при неограниченном увеличении n.

Напомним данное в [4] определение m-периодических B-сплайнов вещественного аргумента. На основном периоде $[0, m]$ сплайны задаются рекуррентно:

$$P_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t - m + 1, & \text{при } t \in (m-1, m]; \end{cases}$$

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s)\, P_1(t - s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Для любого натурального ν сплайн P_ν неотрицателен и удовлетворяет тождеству

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(t - l) \equiv 1. \tag{8}$$

Кроме того, функция P_ν принадлежит пространству $C^{2\nu-2}$.

ЛЕММА. *Для любого натурального ν и вещественного t справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{Q}_{\nu,n}\big(\lfloor tn\rfloor\big) = P_\nu(t), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Доказательство. Зафиксируем натуральное ν. В [4] доказано, что найдётся такое A_ν, что

$$\big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\tfrac{j}{n})\big| \leqslant \frac{A_\nu}{n} \qquad \text{для всех } j,n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 2.$$

Возьмём произвольное вещественное t и положим $j=\lfloor tn\rfloor$. Имеем

$$\Big|\widetilde{Q}_{\nu,n}\big(\lfloor tn\rfloor\big) - P_\nu(t)\Big| \leqslant \big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\tfrac{j}{n})\big| + \big|P_\nu(\tfrac{j}{n}) - P_\nu(t)\big|.$$

Первое слагаемое не превосходит $\frac{A_\nu}{n}$ и поэтому стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Второе слагаемое также стремится к нулю, так как функция P_ν непрерывна и выполняется неравенство

$$\Big|\frac{j}{n} - t\Big| = \Big|\frac{\lfloor tn\rfloor - tn}{n}\Big| \leqslant \frac{1}{n}\,.$$

Следовательно, разность $\widetilde{Q}_{\nu,n}\big(\lfloor tn\rfloor\big) - P_\nu(t)$ стремится к нулю, что и требовалось доказать. □

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $t\in\mathbb{R}$ существует конечный предел*

$$\mathbf{R}_*(t) := \lim_{n\to\infty}\mathbf{R}_n\big(\lfloor tn\rfloor\big). \tag{10}$$

Предельная вектор-функция $\mathbf{R}_*\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ принадлежит пространству C^{2r-2}.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{a}_n(p)$, $p\in 0:m-1$, коэффициенты интерполяционного сплайна $\mathbf{R}_n$. Значения вектор-функции $\mathbf{a}_n$ определяются по формуле (7):

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{w}\,\mathcal{F}_m^{-1}\bigg(\frac{\mathcal{F}_m\big(\mathbf{b}\cdot(h_n * w)\big)}{H_n}\bigg). \tag{11}$$

В правой части (11) от n зависят только функции h_n и H_n. Найдём их пределы.

В силу леммы при $k\in 0:m-1$ справедливо предельное соотношение

$$h(k) := \lim_{n\to\infty} h_n(k) = \lim_{n\to\infty} Q_{r,n}(kn) = P_r(k).$$

При доказательстве теоремы 1 в [4] было установлено, что для каждого $k \in$ $\in 0 : m-1$ существует конечный предел

$$H(k) := \lim_{n\to\infty} H_n(k) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(p)\, \omega_m^{-kp}$$

и $H(k)$ положительно.

Используемые в правой части (11) операции свёртки, ДПФ и обратного ДПФ сводятся к конечному не зависящему от n числу арифметических действий. Следовательно, можно перейти к пределу под этими операциями. Принимая во внимание положительность H, получаем

$$\mathbf{a}_*(p) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n(p) = \left[\frac{1}{w}\, \mathcal{F}_m^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}_m\big(\mathbf{b}\cdot(h*w)\big)}{H}\right)\right](p).$$

Зафиксируем $t \in [0, m]$ и подставим $\lfloor tn \rfloor$ в формулу (3):

$$\mathbf{R}_n\big(\lfloor tn \rfloor\big) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p)\, \mathbf{a}_n(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p)}. \tag{12}$$

Найдём предел знаменателя и числителя дроби по отдельности. Для знаменателя согласно (9) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p).$$

Полученное выражение положительно, так как в силу тождества (8) представляет собой выпуклую комбинацию положительных весов $w(p)$.

Воспользовавшись соотношением (9) и сходимостью последовательности $\big\{\mathbf{a}_n(p)\big\}$, получим выражение для предела числителя в правой части (12):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}\big(\lfloor t-p \rfloor n\big)\, w(p)\, \mathbf{a}_n(p) = \sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p)\, \mathbf{a}_*(p).$$

Итак,

$$\mathbf{R}_*(t) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_n\big(\lfloor tn \rfloor\big) = \frac{\sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p)\, \mathbf{a}_*(p)}{\sum_{p=0}^{m-1} P_r(t-p)\, w(p)}.$$

Сплайн P_r принадлежит пространству C^{2r-2}, поэтому вектор-функция $\mathbf{R}_*(t)$ также принадлежит этому пространству.

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим результат теоремы 2 с геометрической точки зрения. Ломаные, задаваемые проективными интерполяционными сплайнами, сходятся к гладкой кривой, определяемой вектор-функцией $\mathbf{R}_*(t)$. Подставляя в формулу (10) значение $t = l \in 0 : m-1$, получаем

$$\mathbf{R}_*(l) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_n(ln) = \mathbf{b}(l).$$

Следовательно, предельная кривая проходит через точки интерполяции.

ПРИМЕР 3. Пусть $m = 5$, $r = 2$. На рисунках 5–8 штриховыми линиями изображены ломаные, соответствующие проективным дискретным сплайнам, построенным для различных значений n по одному и тому же набору из пяти точек интерполяции. Кроме того, на каждом рисунке сплошной линией показана предельная кривая, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{R}_*(t)$. Точки интерполяции $\mathbf{b}(p)$ отмечены кружками, рядом с которыми указаны веса $w(p)$.

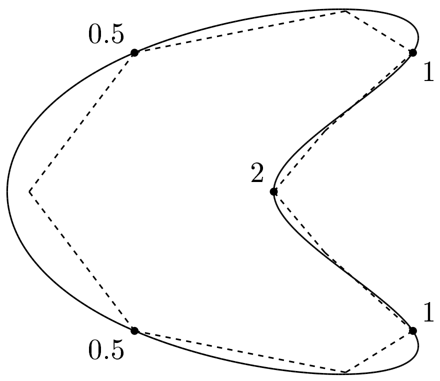

Рис. 5. $n = 2$

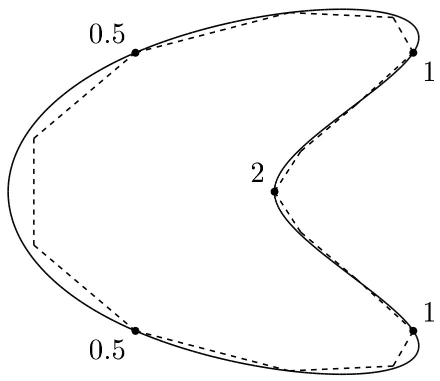

Рис. 6. $n = 3$

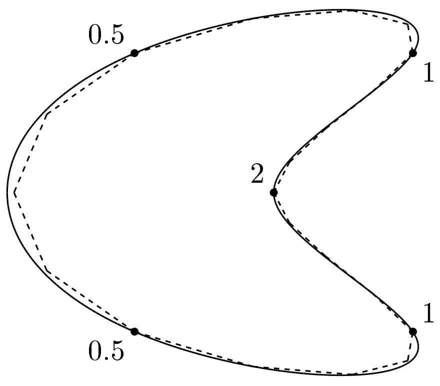

Рис. 7. $n = 4$

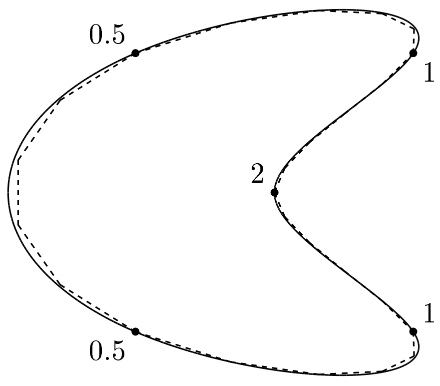

Рис. 8. $n = 5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`)

2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD.* 5th ed. Academic Press, 2002.

3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть первая. СПб.: НИИММ, 2003. 100 с.

4. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0627`).