О СЕДЛОВЫХ ТОЧКАХ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА*

Н. И. Наумова

nataliai.naumova@mail.ru

25 ноября 2008 г.

Данный доклад примыкает к докладу [1].

1°. Рассмотрим задачу математического программирования

$$\begin{aligned} f(x) &\to \inf, \\ g_j(x) &\leqslant 0, \quad i \in 1:s; \\ x &\in P. \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что $P \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное непустое множество и f, $g_1, \ldots,$ g_s — произвольные конечные функции, заданные на P.

Введём функцию Лагранжа

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} u_i\, g_i(x).$$

Говорят [2, с. 144], что пара $\{x^*, u^*\}$, где $x^* \in P$, $u^* \in \mathbb{R}^s_+$, удовлетворяет условию глобальной оптимальности, если

(α) $$L(x^*, u^*) = \min_{x \in P} L(x, u^*);$$

(β) $$u_i^*\, g_i(x^*) = 0, \quad i \in 1:s;$$

(γ) $$g_i(x^*) \leqslant 0, \quad i \in 1:s.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пара $\{x^*, u^*\}$ удовлетворяет условию глобальной оптимальности тогда и только тогда, когда она является седловой точкой функции Лагранжа, т. е.*

$$L(x^*, u) \leqslant L(x^*, u^*) \leqslant L(x, u^*) \tag{2}$$

при всех $x \in P$ и $u \in \mathbb{R}^s_+$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что глобально оптимальная пара является седловой точкой функции Лагранжа, установлено в [1]. Проверим обратное утверждение.

Пусть выполнены соотношения (2). Из первого неравенства следует (α). Проверим, что выполняется условие (γ).

Если $g_{i_0}(x^*) > 0$ при некотором $i_0 \in 1:s$, то, положив при $t > 0$

$$u_i(t) = \begin{cases} t & \text{при } i = i_0, \\ 0 & \text{при остальных } i \in 1:s, \end{cases}$$

получим

$$L\big(x^*, u(t)\big) = f(x^*) + t\, g_{i_0}(x^*).$$

Очевидно, что $L\big(x^*, u(t)\big) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Но это противоречит левому неравенству в (2). Итак, $g_i(x^*) \leqslant 0$ при всех $i \in 1:s$.

Далее, согласно (2),

$$f(x^*) = L(x^*, \mathbb{O}) \leqslant L(x^*, u^*),$$

поэтому

$$L(x^*, u^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} u_i^*\, g_i(x^*) \leqslant f(x^*) \leqslant L(x^*, u^*).$$

Приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{s} u_i^*\, g_i(x^*) = 0,$$

равносильному условию (β) в силу неположительности всех слагаемых.

Теорема доказана. □

2°. Вернёмся к задаче (1) и обозначим

$$X = \big\{x \in P \mid g_i(x) \leqslant 0,\ i \in 1:s\big\},$$
$$f^* = \inf\big\{f(x) \mid x \in X\big\}.$$

Будем предполагать, что $X \neq \varnothing$ и $f^* > -\infty$. Это, в частности, гарантирует конечность f^*.

Запишем двойственную задачу

$$\varphi(u) := \inf\big\{L(x,u) \mid x \in P\big\} \to \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+}.$$

Обозначим $\varphi^* = \sup\big\{\varphi(u) \mid u \in \mathbb{R}^s_+\big\}$.

В [3] получен критерий выполнения соотношения двойственности $f^* = \varphi^*$ в терминах ε-субдифференциала функции чувствительности. Другой вариант критерия, известный в теории игр, связан с ε-седловыми точками функции Лагранжа [4, с. 94–96].

Напомним, что при $\varepsilon > 0$ пара $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$, где $x^\varepsilon \in P$, $u^\varepsilon \in \mathbb{R}^s_+$, называется ε-седловой точкой функции Лагранжа, если

$$-\varepsilon + L(x^\varepsilon, u) \leqslant L(x^\varepsilon, u^\varepsilon) \leqslant L(x, u^\varepsilon) + \varepsilon \tag{3}$$

при всех $x \in P$ и $u \in \mathbb{R}^s_+$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы выполнялось соотношение двойственности $f^* = \varphi^*$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\varepsilon > 0$ у функции Лагранжа существовала ε-седловая точка.*

Доказательство. Необходимость. Покажем прежде всего, что

$$f^* = \inf_{x\in P} \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u). \tag{4}$$

При $x \in X$ имеем

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u) = \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} \Big\{ f(x) + \sum_{i=1}^{s} u_i\, g_i(x) \Big\} = f(x). \tag{5}$$

При $x \in P \setminus X$

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u) = +\infty. \tag{6}$$

Действительно, если $x \in P \setminus X$, то $g_{i_0}(x) > 0$ при некотором $i_0 \in 1 : s$. Положив при $t > 0$

$$u_i(t) = \begin{cases} t & \text{при } i = i_0, \\ 0 & \text{при остальных } i \in 1 : s, \end{cases}$$

получим

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u) \geqslant \sup_{t>0} L\big(x, u(t)\big) = \sup_{t>0} \big\{ f(x) + t\, g_{i_0}(x) \big\} = +\infty.$$

Соотношение (6) установлено.

На основании (5) и (6) запишем

$$\inf_{x\in P} \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u) = \min \Big\{ \inf_{x\in X} \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u),\ \inf_{x\in P\setminus X} \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u) \Big\} =$$
$$= \inf_{x\in X} \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x, u) = \inf_{x\in X} f(x) = f^*.$$

Это соответствует (4).

Теперь соотношение двойственности принимает вид

$$\inf_{x \in P} \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x,u) = \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} \inf_{x \in P} L(x,u). \tag{7}$$

Доказывая необходимость условий теоремы, мы считаем, что равенство (7) выполняется и что величина, стоящая в его левой части, конечна. Нужно проверить, что при всех $\varepsilon > 0$ у функции Лагранжа существует ε-седловая точка.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению точной нижней и точной верхней границ по ε найдутся точки $x^\varepsilon \in P$ и $u^\varepsilon \in \mathbb{R}^s_+$, такие, что

$$\inf_{x \in P} \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x,u) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x^\varepsilon, u),$$

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} \inf_{x \in P} L(x,u) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf_{x \in P} L(x, u^\varepsilon).$$

С учётом (7) получаем

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x^\varepsilon, u) \leqslant \inf_{x \in P} \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x,u) =$$

$$= \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} \inf_{x \in P} L(x,u) \leqslant \inf_{x \in P} L(x, u^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2},$$

так что

$$-\varepsilon + \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x^\varepsilon, u) \leqslant \inf_{x \in P} L(x, u^\varepsilon) \leqslant L(x^\varepsilon, u^\varepsilon). \tag{8}$$

Аналогично,

$$\frac{\varepsilon}{2} + \inf_{x \in P} L(x, u^\varepsilon) \geqslant \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} \inf_{x \in P} L(x,u) =$$

$$= \inf_{x \in P} \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x,u) \geqslant \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x^\varepsilon, u) - \frac{\varepsilon}{2},$$

так что

$$L(x^\varepsilon, u^\varepsilon) \leqslant \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x^\varepsilon, u) \leqslant \inf_{x \in P} L(x, u^\varepsilon) + \varepsilon. \tag{9}$$

Из (8) и (9) очевидным образом следует (3). Значит, $(x^\varepsilon, u^\varepsilon)$ есть ε-седловая точка функции Лагранжа.
Достаточность. Согласно (3)

$$-\varepsilon + \inf_{x \in P} \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x,u) \leqslant -\varepsilon + \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} L(x^\varepsilon, u) \leqslant L(x^\varepsilon, u^\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x \in P} L(x, u^\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \sup_{u \in \mathbb{R}^s_+} \inf_{x \in P} L(x,u) + \varepsilon.$$

Поэтому
$$\inf_{x\in P}\sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x,u) \leqslant \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+}\inf_{x\in P} L(x,u) + 2\varepsilon.$$
Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство
$$\inf_{x\in P}\sup_{u\in\mathbb{R}^s_+} L(x,u) \leqslant \sup_{u\in\mathbb{R}^s_+}\inf_{x\in P} L(x,u).$$
Обратное неравенство верно всегда. Значит, выполняется равенство (7), эквивалентное соотношению двойственности.

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаудиозо М., Малозёмов В. Н. *Глобальная регулярность в математическом программировании* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 октября 2008 г. (http://dha.spb.ru/reps08.shtml#1028)

2. Shapiro J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. J. Wiley & Sons, 1979.

3. Лазарев А. В. *О соотношении двойственности в математическом программировании* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 17 мая 2008 г. (http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0517)

4. Воробьёв Н. Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. М.: Наука, 1985.