ВВЕДЕНИЕ В ПОЛЯРНЫЕ ФОРМЫ*

Ганс-Питер Зейдель

Январь 1993

Резюме

Полярные формы упрощают построение полиномиальных и кусочно-полиномиальных кривых и поверхностей, а также позволяют получить новые алгоритмы и способы представления. В данной статье дано введение в теорию полярных форм и показано, как записать в терминах полярных форм различные рекурсивные алгоритмы, используемые в Геометрическом Моделировании. Как следствие, получен новый более наглядный способ обозначения для контрольных точек кривых и поверхностей Безье и B-сплайнов. Завершается статья обзором некоторых новых результатов, полученных с использованием полярных форм.

1. Введение

Основную идею теории полярных форм проще всего объяснить графически: на рис. 1 приведена кривая Безье третьего порядка F, заданная на единичном интервале $[0,1]$. Также приведены её контрольные точки Безье и все промежуточные вершины, возникающие при вычислении точки кривой, соответствующей параметру t, при помощи *Алгоритма Кастельжо.* Особенность данного рисунка заключается в новой схеме обозначений. В отличие от общепринятого обозначения b_j^l для промежуточных вершин в Алгоритме Кастельжо используется запись $f(\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$, где f суть *полярная форма* полинома F. Так как полином F имеет третью степень, то у его полярной формы три аргумента. Далее, полярная форма *симметрична*, то есть её три аргумента могут быть записаны в любом порядке при неизменном значении f, и f связана с F соотношением $F(u) = f(u,u,u)$. Наконец, соответствие точек и линий на рис. 1 отражено в обозначениях: точки, имеющие два или больше общих аргументов в обозначении, лежат на одной прямой. Точное положение точки

*Seidel H.-P. An introduction to polar forms // IEEE Computer Graphics and Applications. 1993. V. 13. No. 1. P. 38–46. [Перевод на русский язык М. И. Григорьева]

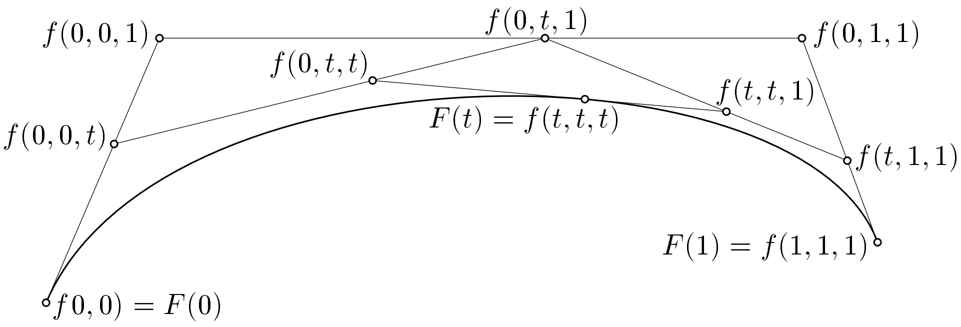

Рис. 1. Кривая Безье третьего порядка и Алгоритм Кастельжо.

на этой прямой определяется третьим оставшимся аргументом: изменение параметра t с постоянной скоростью от 0 до 1 влечёт перемещение, например, точки $f(0,t,1)$ с постоянной скоростью от $f(0,0,1)$ до $f(0,1,1)$. Перемещение по прямой с постоянной скоростью означает, что полярная форма *аффинна* по каждому аргументу, или просто *мультиаффинна*. Таким образом, полярная форма f полинома третьего порядка F — это симметричное триаффинное отображение, удовлетворяющее соотношению $F(u) = f(u,u,u)$.

Отметим, что вышеуказанные свойства позволяют восстанавливать точку $F(t)$ по контрольным точкам Безье $f(0,0,0)$, $f(0,0,1)$, $f(0,1,1)$ и $f(1,1,1)$ следующим образом: при помощи линейной интерполяции вдоль рёбер характеристического многоугольника получаем точки $f(0,0,t)$, $f(0,t,1)$ и $f(t,1,1)$. Интерполируя по ним приходим к $f(0,t,t)$ и $f(1,t,t)$. Наконец, делая заключительный шаг интерполяции по последним двум точкам приходим к точке $F(t) = f(t,t,t)$ на кривой. Описанный процесс в точности повторяет Алгоритм Кастельжо.

2. Полярная форма полиномиальной кривой

Перенесём вводное обсуждение на случай полиномиальной кривой произвольной степени. В частности, установим так называемый *Поляризационный Принцип* [4, 5, 11–13], который по существу утверждает, что каждому полиному соответствует единственная полярная форма.

Напомним, что отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^t$ называется *аффинным*, если оно сохраняет аффинные комбинации, то есть если соотношение $f\left(\sum_j \alpha_j\, u_j\right) = \sum_j \alpha_j\, f(u_j)$ выполняется для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ таких, что $\sum_j \alpha_j = 1$. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t$ называется n-аффинным, если оно аффинно по каждому аргументу при фиксированных остальных. Таким образом,

f мультиаффинно, если

$$f\big(u_1, \ldots, \sum_j \alpha_j\, u_{i_j}, \ldots, u_n\big) = \sum_j \alpha_j\, f(u_1, \ldots, u_{i_j}, \ldots, u_n)$$

при любых $i = 1, \ldots, n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, $\sum_j \alpha_j = 1$. Наконец, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t$ называется *симметричным*, если оно не изменяет своих значений при любой перестановке аргументов.

Покажем, как расширить область определения симметричного мультиаффинного отображения f на случай векторов. Пусть $\hat{\xi}_i = w_i - v_i$ обозначает одномерный вектор. Определим $f(u_1, \ldots, u_{n-q}, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q)$ рекурсивно

$$f(u_1, \ldots, u_{n-q}, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q) =$$
$$f(u_1, \ldots, u_{n-q}, w_1, \hat{\xi}_2, \ldots, \hat{\xi}_q) - f(u_1, \ldots, u_{n-q}, v_1, \hat{\xi}_2, \ldots, \hat{\xi}_q).$$

Отметим, что данное определение корректно, поскольку зависит только от векторов $\hat{\xi}_i$ и не зависит от начальной и конечной точек w_i и v_i.

Опираясь на введённые обозначения можем сформулировать *Поляризационный Принцип* [11–13]:

ТЕОРЕМА 2.1 (Поляризационный Принцип). *Полиномы $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^t$ степени n и симметрические мультиаффинные отображения $f\colon (\mathbb{R})^n \to \mathbb{R}^t$ эквивалентны друг другу. В частности, если дано отображение одного типа, то существует единственное отображение другого типа такое, что выполняется соотношение $F(u) = f(u, \ldots, u)$. В этом случае f называется мультиаффинной полярной формой полинома F, а F — диагональю f. При этом q-я производная полинома F может быть записана в виде*

$$F^{(q)}(u) = \frac{n!}{(n-q)!}\, f(\underbrace{u, \ldots, u}_{n-q}, \underbrace{\hat{1}, \ldots, \hat{1}}_{q}), \tag{2.1}$$

где $\hat{1} = 1 - 0 \in \mathbb{R}$ — стандартный одномерный единичный вектор, а $f(u, \ldots, u, \hat{1}, \ldots, \hat{1})$ определено так, как указано выше.

Достаточно просто записать явную формулу для полярной формы f, когда F имеет вид

$$F(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i\, u^i.$$

В этом случае полярная форма f задаётся формулой

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \binom{n}{i}^{-1} \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ |S| = i}} \prod_{j \in S} u_j\,,$$

и коэффициенты $\mathbf{a}_i$ удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{a}_i = \frac{F^{(q)}(0)}{q!} = \binom{n}{q} f(\underbrace{0,\dots,0}_{n-q},\underbrace{\hat{1},\dots,\hat{1}}_{q}).$$

Например, для полинома третьей степени

$$F(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\,u + \mathbf{a}_2\,u^2 + \mathbf{a}_3\,u^3$$

получаем

$$f(u_1,u_2,u_3) = \mathbf{a}_0 + \frac{\mathbf{a}_1}{3}\,(u_1+u_2+u_3) + \frac{\mathbf{a}_2}{3}\,(u_1\,u_2 + u_2\,u_3 + u_3\,u_1) + \mathbf{a}_3\,u_1\,u_2\,u_3.$$

Независящее от системы координат представление для полярной формы имеет вид [11]

$$f(u_1,\dots,u_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\substack{S\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |S|=i}} (-1)^{n-i}\,i^n\,F\Big(\frac{1}{i}\sum_{j\in S} u_j\Big).$$

В завершение данного пункта получим условия непрерывности между двумя полиномами в терминах полярных форм. Перефразируя (2.1), приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 2.2 (Условия непрерывности C^q). *Пусть $F,G\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^t$ — два полинома степени n, и пусть $u\in\mathbb{R}$. Следующие два условия эквивалентны:*

- *F и G совпадают в точке u вместе со всеми производными до q-го порядка включительно;*
- *$f(u,\dots,u,u_1,\dots,u_q) = g(u,\dots,u,u_1,\dots,u_q)$ при любых $u_1,\dots,u_q\in\mathbb{R}$.*

3. Кривые Безье

Какая же польза от полярных форм? Рассмотрим полиномиальную кривую $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^t$. Предположим мы хотим представить F как кривую Безье над некоторым заданным интервалом $\Delta=[r,s]$. Как определить её контрольные точки Безье? Записывая u как аффинную комбинацию r и s,

$$u = \frac{s-u}{s-r}\,r + \frac{u-r}{s-r}\,s,$$

получаем

$$F(u) = f(u,\dots,u) = \frac{s-u}{s-r}\, f(u,\dots,u,r) + \frac{u-r}{s-r}\, f(u,\dots,u,s) =$$
$$= \left(\frac{s-u}{s-r}\right)^2 f(u,\dots,u,r,r) + 2\left(\frac{u-r}{s-r}\right)\left(\frac{s-u}{s-r}\right) f(u,\dots,u,r,s) +$$
$$+ \left(\frac{u-r}{s-r}\right)^2 f(u,\dots,u,s,s) = \dots =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} B_j^{\Delta,n}(u)\, f(\underbrace{r,\dots,r}_{n-j},\underbrace{s,\dots,s}_{j}),$$

где

$$B_j^{\Delta,n}(u) = \binom{n}{j}\left(\frac{u-r}{s-r}\right)^j \left(\frac{s-u}{s-r}\right)^{n-j}, \qquad j = 0,\dots,n,$$

полиномы Бернштейна над $\Delta = [r,s]$. Таким образом, имеем [4, 5, 11, 12]:

ТЕОРЕМА 3.1 (Контрольные точки Безье). *Пусть $\Delta = [r,s]$ — произвольный интервал. Любой полином $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^t$ может быть представлен как полином Безье над Δ. Его контрольными точками Безье будут*

$$\mathbf{b}_j = f(\underbrace{r,\dots,r}_{n-j},\underbrace{s,\dots,s}_{j}), \tag{3.1}$$

где f — полярная форма F.

Соотношение (3.1) порождает рекурсивный алгоритм

$$\mathbf{b}_j^l(u) = f(\underbrace{r,\dots,r}_{n-l-j},\underbrace{u,\dots,u}_{l},\underbrace{s,\dots,s}_{j}) =$$
$$= \frac{s-u}{s-r}\, f(\underbrace{r,\dots,r}_{n-l-j+1},\underbrace{u,\dots,u}_{l-1},\underbrace{s,\dots,s}_{j}) + \frac{u-r}{s-r}\, f(\underbrace{r,\dots,r}_{n-l-j},\underbrace{u,\dots,u}_{l-1},\underbrace{s,\dots,s}_{j+1}) =$$
$$= \frac{s-u}{s-r}\,\mathbf{b}_j^{l-1}(u) + \frac{u-r}{s-r}\,\mathbf{b}_{j+1}^{l-1}(u), \qquad l = 1,\dots,n.$$

На последнем шаге при $l = n$ получаем желаемую точку на кривой $\mathbf{b}_0^n(u) = f(u,\dots,u) = F(u)$. Пример вычислений по этой схеме приведён на рис. 2 и рис. 3. Данный алгоритм впервые был предложен Полем Кастельжо [4, 5], поэтому и называется *Алгоритмом Кастельжо.*

Из формулы (3.1) также видно, что Алгоритм Кастельжо предоставляет гораздо больше возможностей, нежели простое вычисление. Предположим,

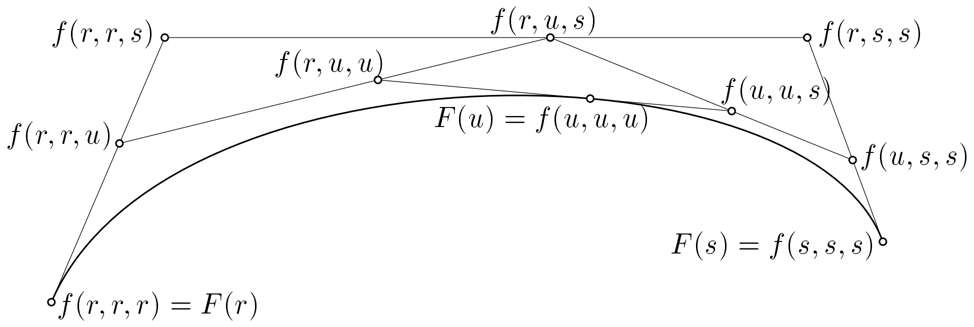

Рис. 2. Алгоритм Кастельжо в случае $n = 3$.

мы хотим разбить кривую Безье F над заданным интервалом $\Delta = [s, t]$ в точке, соответствующей произвольному параметру $u \in \Delta$. Как найти контрольные точки Безье для левого и правого сегментов $\mathbf{F}_l$ и $\mathbf{F}_r$ над интервалами $\Delta_l = [r, u]$ и $\Delta_r = [u, s]$? Соотношение (3.1) говорит нам, что новыми контрольными точками Безье после разбиения будут

$$\mathbf{b}_0^l = f(r, \ldots, r), \quad \mathbf{b}_1^l = f(r, \ldots, r, u), \quad \ldots, \quad \mathbf{b}_n^l = f(u, \ldots, u),$$

и

$$\mathbf{b}_0^r = f(u, \ldots, u), \quad \mathbf{b}_1^r = f(u, \ldots, u, s), \quad \ldots, \quad \mathbf{b}_n^r = f(s, \ldots, s). \tag{3.2}$$

Очевидно, что эти точки автоматически вычисляются в Алгоритме Кастельжо и хранятся вдоль левой и правой диагоналей.

Наконец, незначительная модификация Алгоритма Кастельжо позволяет вычислить произвольное значение полярной формы $f(u_1, \ldots, u_n)$, рекуррентно вычисляя значения

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_j^l(u_1, \ldots, u_l) &= f(\underbrace{r, \ldots, r}_{n-l-j}, \underbrace{u_1, \ldots, u_l}_{l}, \underbrace{s, \ldots, s}_{j}) = \\
&= \frac{s - u_l}{s - r} f(\underbrace{r, \ldots, r}_{n-l-j+1}, \underbrace{u_1, \ldots, u_{l-1}}_{l-1}, \underbrace{s, \ldots, s}_{j}) + \\
&+ \frac{u_l - r}{s - r} f(\underbrace{r, \ldots, r}_{n-l-j}, \underbrace{u_1, \ldots, u_{l-1}}_{l-1}, \underbrace{s, \ldots, s}_{j+1}) = \\
&= \frac{s - u_l}{s - r} \mathbf{b}_j^{l-1}(u_1, \ldots, u_{l-1}) + \frac{u_l - r}{s - r} \mathbf{b}_{j+1}^{l-1}(u_1, \ldots, u_{l-1}).
\end{aligned}$$

При $l = n$ окончательно получаем $\mathbf{b}_0^n(u_1, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$. Данный алгоритм называется *мультиаффинным Алгоритмом Кастельжо.*

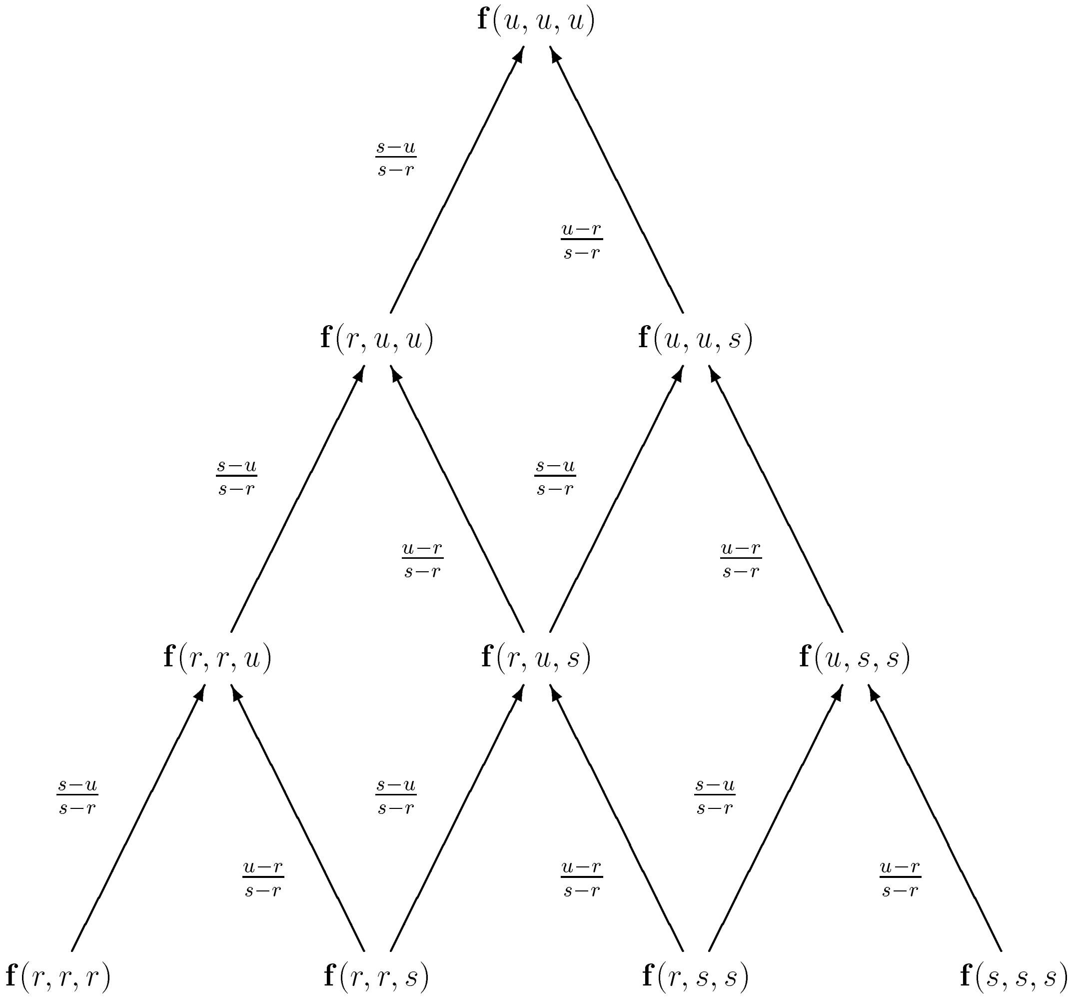

Рис. 3. Алгоритм Кастельжо для случая $n = 3$.

Как насчёт производных? Представляя в формуле (2.1) $\hat{1} = \frac{1}{s-r}(s-r)$, получим

$$F'(r) = \frac{n}{s-r}\big(f(r,\ldots,r,s) - f(r,\ldots,r)\big) = \frac{n}{s-r}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$$

и, аналогично

$$F''(r) = \frac{n(n-1)}{(s-r)^2}(\mathbf{b}_2 - 2\,\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0), \quad \text{и т. д.}$$

Полученные формулы совпадают с хорошо известными формулами для производных кривых Безье.

В завершение данного пункта сделаем короткое замечание об аффинной инвариантности. Пусть $\widetilde{F} = \phi \circ F$ — образ F под действием аффинного преобразования ϕ (например, перенос, масштабирование, поворот). Из той части теоремы 2.1, где говорится о единственности, следует, что полярная форма $\widetilde{F}$ (обозначим её $\widetilde{f}$) задаётся равенством $\widetilde{f} = \phi \circ f$, и, следовательно, контрольные точки Безье $\widetilde{\mathbf{b}}_j$ кривой $\widetilde{F}$ удовлетворяют соотношению

$$\widetilde{\mathbf{b}}_j = \widetilde{f}(r, \ldots, r, s, \ldots, s) = \phi\big(f(r, \ldots, r, s, \ldots, s)\big) = \phi(\mathbf{b}_j).$$

Это означает, что взаимное расположение кривой F и ее характеристического многоугольника инвариантно относительно аффинных преобразований.

4. B-сплайн кривые

Как можно перенести результаты предыдущего пункта с кривых Безье на B-сплайны? Как мы установили, полиномиальная кривая F и её полярная форма f полностью определяются контрольными точками Безье $\mathbf{b}_j = f(r, \ldots, r, s, \ldots, s)$. Пусть задана неубывающая последовательность вещественных чисел

$$r_n \leqslant \ldots \leqslant r_1 < s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n.$$

Покажем, что F можно также определить с помощью *контрольных точек де Бура* $\mathbf{d}_j = f(r_1, \ldots, r_{n-j}, s_1, \ldots, s_j)$. Поскольку $r_i \neq s_j$, то u можно представить как аффинную комбинацию r_i и s_j :

$$u = \frac{s_j - u}{s_j - r_i}\, r_i + \frac{u - r_i}{s_j - r_i}\, s_j.$$

Последовательно вычисляя

$$\begin{gathered}
\mathbf{d}_j^l(u) = f(r_1, \ldots, r_{n-l-j}, u, \ldots, u, s_1, \ldots, s_j) = \\
= \frac{s_{j+1} - u}{s_{j+1} - r_{n-l-j+1}}\, f(r_1, \ldots, r_{n-l-j+1}, u, \ldots, u, s_1, \ldots, s_j) + \\
+ \frac{u - r_{n-l-j+1}}{s_{j+1} - r_{n-l-j+1}}\, f(r_1, \ldots, r_{n-l-j}, u, \ldots, u, s_1, \ldots, s_{j+1}) = \\
\frac{s_{j+1} - u}{s_{j+1} - r_{n-l-j+1}}\, \mathbf{d}_j^{l-1}(u) + \frac{u - r_{n-l-j+1}}{s_{j+1} - r_{n-l-j+1}}\, \mathbf{d}_{j+1}^{l-1}(u),
\end{gathered}$$

находим, что $F(u) = \mathbf{d}_0^n(u)$.

Анализ показывает, что данный алгоритм идентичен *Алгоритму де Бура* вычисления отрезка B-сплайна. Таким образом, верна следующая [12, 13, 16]

ТЕОРЕМА 4.1 (Контрольные точки де Бура). *Каждый полином $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^t$ может быть представлен как отрезок* B-*сплайна над неубывающей последовательностью узлов $r_n \leqslant \ldots \leqslant r_1 < s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n$. Контрольные точки де Бура при этом равны*

$$\mathbf{d}_j = f(r_1, \ldots, r_{n-j}, s_1, \ldots, s_j), \tag{4.1}$$

где f — полярная форма F.

Теорема 4.1 и Алгоритм де Бура пояснены на рис. 4 и рис. 5. Мультиаффинная модификация алгоритма опять же может быть использована для вычисления произвольных значений полярной формы $f(u_1, \ldots, u_n)$ при заданных контрольных точках.

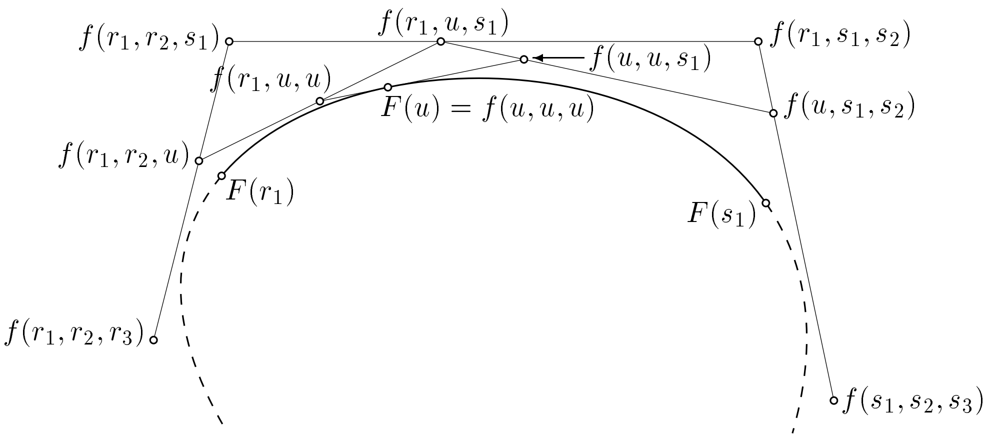

Рис. 4. Алгоритм де Бура для случая $n = 3$.

Важное значение имеет процедура *включения узла*. Предположим, что задана последовательность узлов $r_n \leqslant \ldots \leqslant r_1 < s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n$, и мы хотим включить новый узел $t\colon r_1 \leqslant t < s_1$. Из (4.1) следует, что после включения узла новые контрольные точки $\mathbf{d}_j^*$ могут быть найдены по формуле

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_j^* &= f(t, r_1, \ldots, r_{n-j-1}, s_1, \ldots, s_j) = \\
&= \frac{s_{j+1} - t}{s_{j+1} - r_{n-j}} f(r_1, \ldots, r_{n-j}, s_1, \ldots, s_j) + \\
&+ \frac{t - r_{n-j}}{s_{j+1} - r_{n-j}} f(r_1, \ldots, r_{n-j-1}, s_1, \ldots, s_{j+1}) = \\
&= \frac{s_{j+1} - t}{s_{j+1} - r_{n-j}} \mathbf{d}_j + \frac{t - r_{n-j}}{s_{j+1} - r_{n-j}} \mathbf{d}_{j+1}.
\end{aligned}$$

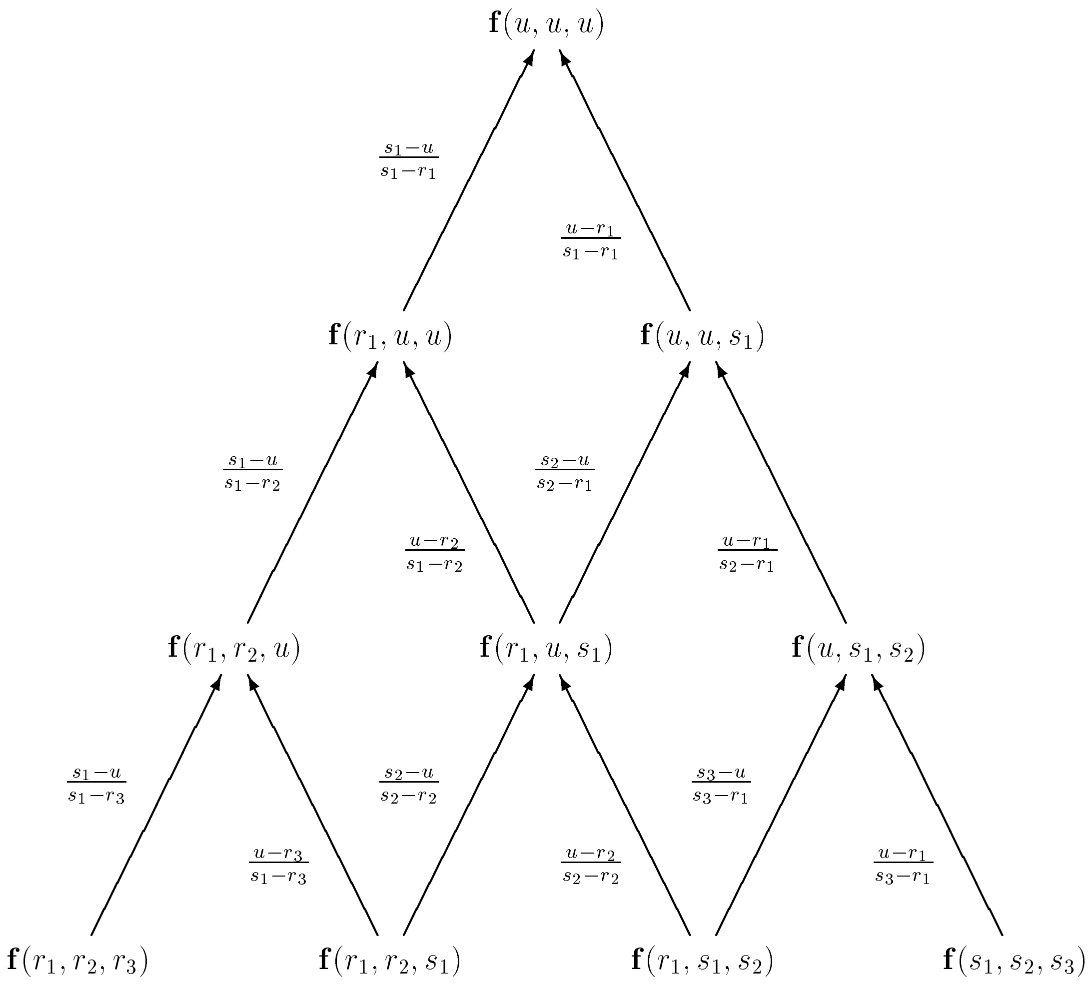

Рис. 5. Алгоритм де Бура для сегмента B-сплайна третьей степени.

Это в точности *Алгоритм Боэма*. Отметим, что Алгоритм Боэма идентичен первому шагу Алгоритма де Бура. Другие алгоритмы включения узла, как, например, Алгоритм ОСЛО, подробно изучались в ряде работ П. Барри и Р. Голдмана [1, 9]. Исчерпывающее объяснение этого материала можно найти в [2].

Завершим этот пункт коротким обсуждением того замечательного факта, что B-сплайн кривые обладают гладкостью C^{n-q} в узле кратности q. Чтобы излишне не усложнять наше обсуждение, рассмотрим только случай, когда $\{t_i\}_i$ — последовательность простых узлов. Пусть $F_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^t$ и $F_{i+1}\colon [t_{i+1}, t_{i+2}] \to \mathbb{R}^t$ задают два смежных отрезка B-сплайна, состыковывающихся в узле t_{i+1}. Поскольку $f_i(t_{i-n+j+1}, \ldots, t_{i+j}) = f_{i+1}(t_{i-n+j+1}, \ldots, t_{i+j})$,

$j = 1, \ldots, n$, то, пользуясь последовательным разложением, получаем

$$f_i(t_{i+1}, u, \ldots, u) = f_{i+1}(t_{i+1}, u, \ldots, u).$$

Отсюда и из (2.1) следует, что F_i и F_{i+1} действительно C^{n-1}-непрерывны в узле t_{i+1}. На рис. 6 приведены перекрывающиеся схемы де Бура для двух смежных отрезков B-сплайна третьего порядка.

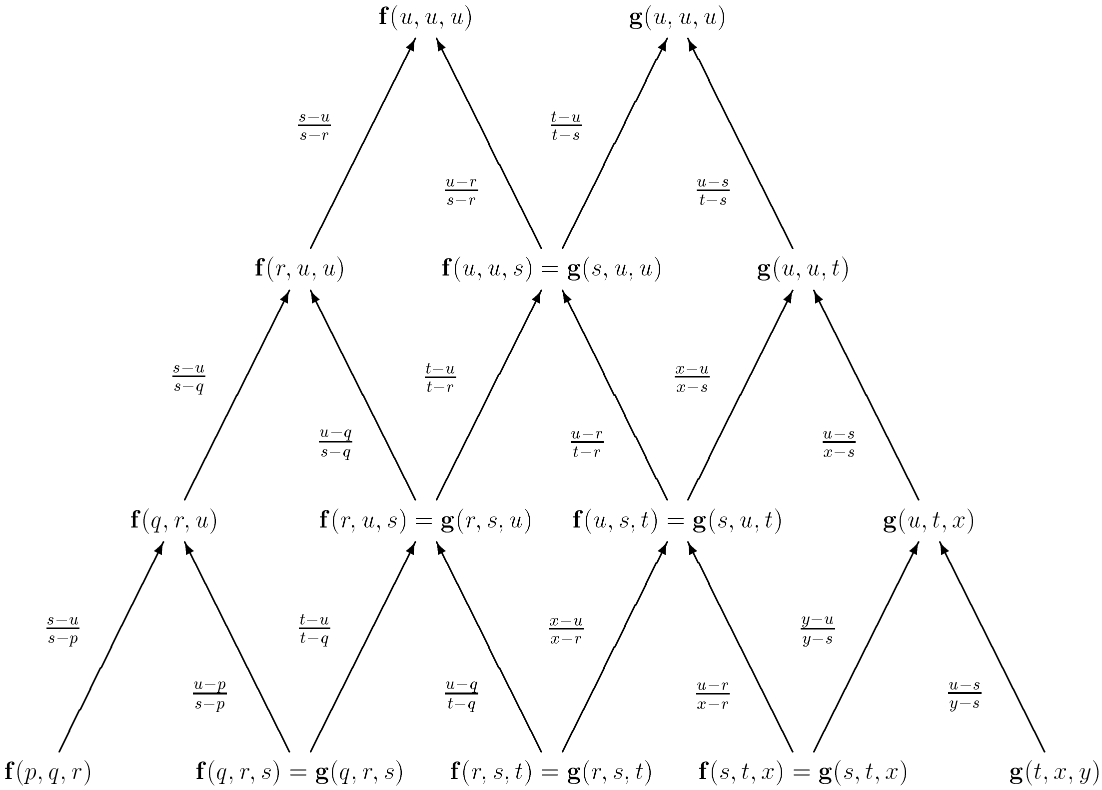

Рис. 6. Перекрывающиеся схемы де Бура для двух смежных отрезков B-сплайна третьего порядка $F\colon [r,s] \to \mathbb{R}^t$ и $G\colon [s,t] \to \mathbb{R}^t$ над последовательностью узлов $\ldots, p, q, r, s, t, x, y, \ldots$.

5. Поверхности тензорного произведения

Не секрет, что в Геометрическом Моделировании наиболее популярны поверхности тензорного произведения. Например, в случае Безье поверхность тензорного произведения имеет вид

$$F(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i(u)\, B_j(v)\, \mathbf{b}_{ij}, \qquad \mathbf{b}_{ij} \in \mathbb{R}^t,$$

или

$$F(u,v)=\sum_{i=0}^{n} B_i(u)\,\mathbf{b}_{i_v}, \quad \text{где } \mathbf{b}_{i_v}=\mathbf{b}_i(v)=\sum_{j=0}^{m} B_j(v)\,\mathbf{b}_{ij}.$$

Последнее соотношение показывает, что поверхности тензорного произведения можно рассматривать как «кривые кривых», и, таким образом, поясняет, что для того, чтобы изучить поверхности тензорного произведения, сначала нужно изучить составляющие их кривые.

Рассмотрим полярные формы полиномиальных поверхностей тензорного произведения. Пусть задана полиномиальная поверхность тензорного произведения степени n по u и m по v:

$$F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon\ (u,v)\to F(u,v).$$

Для того, чтобы найти соответствующую F полярную форму f_{TP}, нужно просто поляризовать обе независимые переменные u и v отдельно. Получающееся отображение

$$f_{TP}\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^t\colon\ (u_1,\ldots,u_n;v_1,\ldots,v_m)\to f_{TP}(u_1,\ldots,u_n;v_1,\ldots,v_m)$$

обладает следующими свойствами:

- Симметричность: f_{TP} симметрично относительно переменных u_i и v_j независимо, то есть

  $$f_{TP}(u_1,\ldots,u_n;v_1,\ldots,v_m)=f_{TP}(u_{\pi(1)},\ldots,u_{\pi(n)};v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m)})$$

  для всех перестановок $\pi\in\Sigma_n$ и $\sigma\in\Sigma_m$.

- Мультиаффинность: f_{TP} аффинно по каждой из переменных u_i и v_j независимо.

- Диагональное Свойство: $f_{TP}(u,\ldots,u,v,\ldots,v)=F(u,v)$.

Продолжая обобщать одномерный случай, получаем, что контрольные точки Безье $\mathbf{b}_{ij}$ поверхности F, если она представлена в виде поверхности Безье тензорного произведения $F(u,v)=\sum_i\sum_j B_i^n(u)\,B_j^m(v)\,\mathbf{b}_{ij}$, заданной над $[p,q]\times[r,s]$, имеют вид

$$\mathbf{b}_{ij}=f_{TP}(\underbrace{p,\ldots,p}_{n-i},\underbrace{q,\ldots,q}_{i},\underbrace{r,\ldots,r}_{m-j},\underbrace{s,\ldots,s}_{j}).$$

Если же F представлена в виде сегмента В-сплайн поверхности тензорного произведения $F(u,v)=\sum_i\sum_j N_i^n(u)\,N_j^m(v)\,\mathbf{d}_{ij}$, с векторами узлов $S=\{s_i\}$ и $T=\{t_j\}$, то её контрольные точки де Бура можно записать в виде

$$\mathbf{d}_{ij}=f_{TP}(s_{i+1},\ldots,s_{i+n};t_{j+1},\ldots,t_{j+m}).$$

Многие алгоритмы, о которых говорилось в предыдущих разделах, могут быть обобщены с кривых Безье и B-сплайн кривых на поверхности Безье тензорного произведения и B-сплайн поверхности тензорного произведения.

6. Полярная форма полиномиальной поверхности

Перейдём к обсуждению «настоящих» поверхностей. Начнём с *Поляризационного Принципа* для поверхностей, который является практически дословным обобщением одномерного случая:

ТЕОРЕМА 6.1 (Поляризационный Принцип). *Полиномы $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^t$ степени n и симметрические мультиаффинные отображения $f\colon (\mathbb{R}^2)^n \to \mathbb{R}^t$ эквивалентны друг другу. В частности, если дано отображение одного типа, то существует единственное отображение другого типа такое, что выполняется соотношение $F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u})$. В этом случае f называется мультиаффинной полярной формой полинома F, а F — диагональю f. Кроме того, q-я производная по направлениям $\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q \in \mathbb{R}^2$ полинома F может быть записана в виде*

$$D_{\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_q} F(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-q)!}\, f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q), \tag{6.1}$$

где $f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_q)$ определено так же, как в пункте 2.

В случае, когда используется степенной базис, всё по-прежнему просто. Например, для полинома второй степени от двух переменных

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{a}_{00} + \mathbf{a}_{10}\, u + \mathbf{a}_{01}\, v + \mathbf{a}_{20}\, u^2 + \mathbf{a}_{11}\, u\, v + \mathbf{a}_{02}\, v^2$$

имеем

$$f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{a}_{00} + \frac{\mathbf{a}_{10}}{2}\,(u_1 + u_2) + \frac{\mathbf{a}_{01}}{2}\,(v_1 + v_2) + \mathbf{a}_{20}\, u_1\, u_2 + \\ + \frac{\mathbf{a}_{11}}{2}\,(u_1\, v_2 + u_2\, v_1) + \mathbf{a}_{02}\, v_1\, v_2.$$

Независящее от системы координат представление для полярной формы принимает вид [11]

$$f(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |S| = i}} (-1)^{n-i}\, i^n\, F\Big(\frac{1}{i} \sum_{j \in S} \mathbf{u}_j\Big).$$

Условия непрерывности также аналогичны одномерному случаю:

ТЕОРЕМА 6.2 (Условия C^q-непрерывности). *Пусть $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^t$ — два полинома степени n от двух переменных, и пусть $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Следующие два условия эквиваленты:*

- *F и G совпадают в точке $\mathbf{u}$ вместе со всеми смешанными производными до q-го порядка включительно;*
- *$f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q) = g(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q)$ при любых $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q \in \mathbb{R}^2$.*

7. Треугольные поверхности Безье

Треугольные поверхности Безье являются прямой аналогией к кривым Безье. Рассмотрим полиномиальную поверхность $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^t$. Предположим, мы хотим представить F как треугольную поверхность Безье над некоторой треугольной областью определения $\Delta = \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$. Записывая $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ в барицентрических координатах относительно Δ

$$\mathbf{u} = r(\mathbf{u})\,\mathbf{r} + s(\mathbf{u})\,\mathbf{s} + t(\mathbf{u})\,\mathbf{t}, \qquad r + s + t = 1,$$

получаем

$$\begin{gathered} F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}) = r(\mathbf{u})\, f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{r}) + \\ + s(\mathbf{u})\, f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{s}) + t(\mathbf{u})\, f(\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{t}) = \ldots = \\ = \sum_{i+j+k=n} B^{\Delta,n}_{ijk}(\mathbf{u})\, f(\underbrace{\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}}_{i}, \underbrace{\mathbf{s}, \ldots, \mathbf{s}}_{j}, \underbrace{\mathbf{t}, \ldots, \mathbf{t}}_{k}), \end{gathered}$$

где через

$$B^{\Delta,n}_{ijk}(\mathbf{u}) = \binom{n}{ijk} r(\mathbf{u})^i\, s(\mathbf{u})^j\, t(\mathbf{u})^k$$

обозначены полиномы Бернштейна над $\Delta = \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$. Сформулируем полученный результат в виде теоремы:

ТЕОРЕМА 7.1 (Контрольные точки Безье). *Пусть $\Delta = \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ — произвольный треугольник. Любая поверхность, задающаяся некоторым полиномом $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^t$, может быть представлена как треугольная поверхность Безье над Δ. Её контрольными точками Безье будут*

$$\mathbf{b}_{ijk} = f(\underbrace{\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}}_{i}, \underbrace{\mathbf{s}, \ldots, \mathbf{s}}_{j}, \underbrace{\mathbf{t}, \ldots, \mathbf{t}}_{k}), \tag{7.1}$$

где f — полярная форма F.

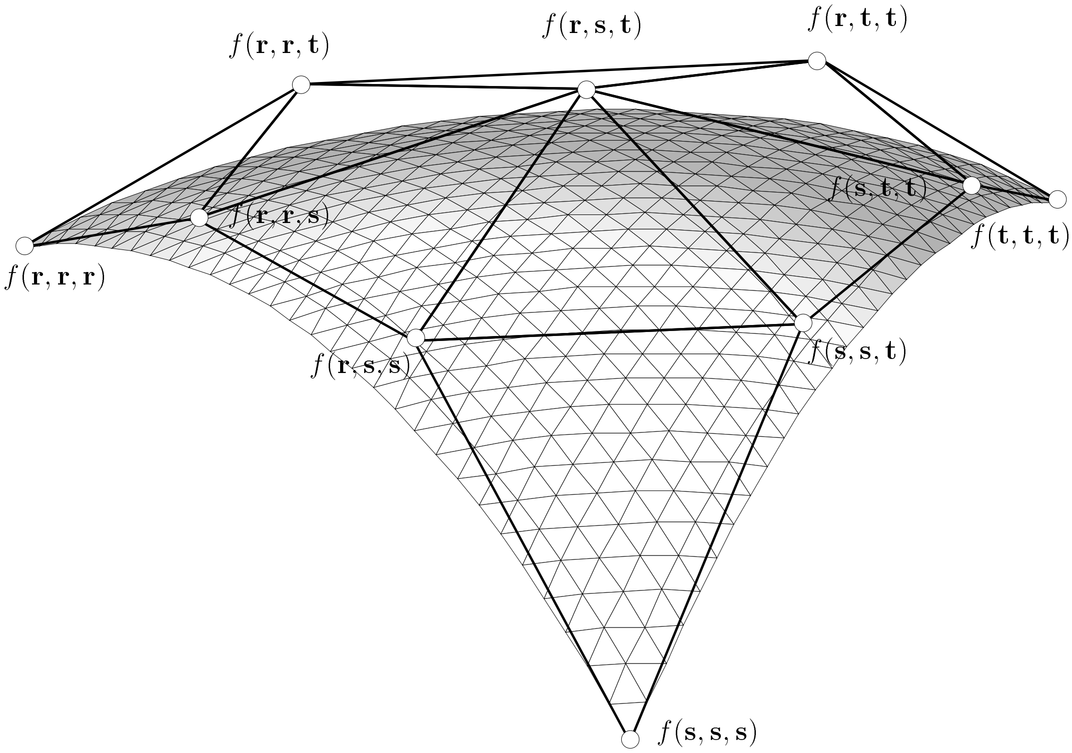

Рис. 7. Треугольная поверхность Безье третьего порядка.

Подобно случаю кривых, теорема 7.1 сразу приводит к Алгоритму Кастельжо для вычисления, разбиения и анализа полярной формы. Возникающая вычислительная схема проиллюстрирована на рис. 8. Хорошо известные формулы для производных треугольных поверхностей Безье и условия непрерывности следуют из (6.1) и (7.1). Например, для $\hat{\xi} = \mathbf{s} - \mathbf{r}$, получаем

$$D_{\hat{\xi}} F(\mathbf{r}) = n\left(f(\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}, \mathbf{s}) - f(\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}, \mathbf{r})\right) = n\left(\mathbf{b}_{n-1,1,0} - \mathbf{b}_{n,0,0}\right).$$

Наконец, аффинная инвариантность проверяется точно так же, как и в случае кривых.

8. В-порции

В предыдущем пункте мы убедились, что полярная форма f единственным образом определяется набором своих значений $f(\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \ldots, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \ldots, \mathbf{t})$ на вершинах треугольника $\Delta = \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$. Это определение можно обобщить, приписав набор – обычно различных – узлов каждой вершине треугольника Δ. Поверхность, имеющая такое представление, называется В-*порцией* [17, 18].

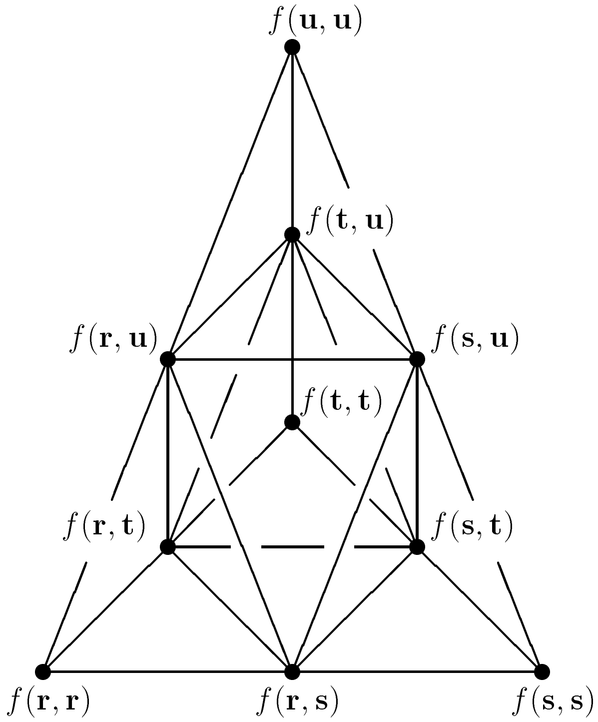

Рис. 8. Алгоритм Кастельжо для поверхности Безье второго порядка.

Будем говорить, что совокупность $\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\}$ является *системой узлов*, если все треугольники $\Delta_{ijk} = \Delta(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j, \mathbf{t}_k)$ не вырожденны. В этой ситуации можно представить $\mathbf{u}$ в барицентрических координатах относительно $\Delta_{ijk} = \Delta(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j, \mathbf{t}_k)$

$$\mathbf{u} = r_{ijk}(\mathbf{u})\,\mathbf{r}_i + s_{ijk}(\mathbf{u})\,\mathbf{s}_j + t_{ijk}(\mathbf{u})\,\mathbf{t}_j, \qquad r_{ijk} + s_{ijk} + t_{ijk} = 1,$$

и, последовательно вычисляя

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^l_{ijk}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_j, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \\ = r_{i+1,j+1,k+1}\, f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_j, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) + \\ + s_{i+1,j+1,k+1}\, f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{j+1}, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) + \\ + t_{i+1,j+1,k+1}\, f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_j, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{k+1}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \end{aligned}$$

находим, что $F(\mathbf{u}) = \mathbf{d}^n_{000}(\mathbf{u})$. Видим, что $F(\mathbf{u})$ полностью определяется точками $\mathbf{d}_{ijk} = f(r_1, \dots, t_k)$. Значит, верна следующая

ТЕОРЕМА 8.1 (Контрольные точки B-порции). *Пусть задана система узлов $\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{t}_n\}$. Каждый полином $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^t$ может быть представлен как* B-*порция над* $\mathcal{A}$ *с контрольными точками*

$$\mathbf{d}_{ijk} = f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_j, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_k), \tag{8.1}$$

где f — полярная форма F.

Теорема 8.1 показывает, что B-порции являются двумерным аналогом отрезков B-сплайн кривой. В частности, B-порции можно вычислять по алгоритму, подобному Алгоритму де Бура, находя точку $F(\mathbf{u})$ на поверхности по заданным контрольным точкам при помощи последовательных линейных интерполяций (рис. 9). Мультиаффинная модификация алгоритма и в этом случае может быть использована для вычисления произвольных значений полярной формы $f(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

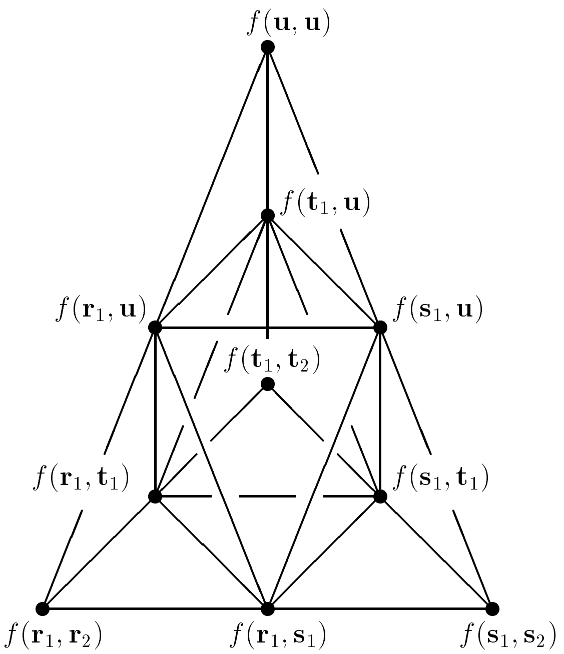

Рис. 9. Алгоритм де Бура для сегмента B-сплайн поверхности второго порядка.

9. Многопараметрические B-сплайн поверхности

В [3] был предложен новый способ представления для кусочно-полиномиальных поверхностей, основанный на сочетании B-порций и симплексных сплайнов. Предложенный способ использует смешивающие функции и контрольные точки, позволяя строить гладкие кусочно-полиномиальные поверхности над произвольными триангуляциями в плоскости параметров. В связи с ограничением на объём статьи, нет возможности обсудить данное представление детально. Приведём лишь основные его свойства.

ТЕОРЕМА 9.1 (Многопараметрические B-сплайн поверхности). *Пусть* $F(\mathbf{u}) = \sum_I N_{ijk}^I(\mathbf{u})\mathbf{c}_{ijk}^I$ *задаёт многопараметрическую* B*-сплайн поверхность. Эта поверхность обладает следующими свойствами:*

- $F(\mathbf{u})$ *является кусочно-полиномиальной поверхностью степени* n*.*
- *Изменение положения одной контрольной точки* $\mathbf{c}_{ijk}^I$ *влияет только на поверхность, заданную на треугольнике* $\Delta(I)$*, и на поверхности, заданные на окружающих треугольниках.*
- $F(\mathbf{u})$ *лежит внутри выпуклой оболочки, натянутой на характеристический многогранник.*
- *Поверхность* $F(\mathbf{u})$ *в общем обладает гладкостью* C^{n-1}*.*
- *Взаимное расположение поверхности* F *и ее характеристического многогранника инвариантно относительно аффинных преобразований.*

Уже первые практические опыты с данными поверхностями показали практическую применимость основных связанных с ними алгоритмов [8, 18]. Оказалось возможным редактировать и производить различные операции в реальном времени с поверхностями второй и третьей степени над произвольными триангуляциями.

Применимость определённой схемы построения поверхностей на практике зависит во многом от того, как много поверхностей различного типа можно представить, используя эту схему. Ответ на этот вопрос для B-сплайнов даёт следующая теорема [18].

ТЕОРЕМА 9.2. *Любая полиномиальная или кусочно-полиномиальная поверхность* F *может быть представлена, как* B*-сплайн поверхность. Её контрольные точки определяются соотношением*

$$\mathbf{c}_{ijk}^I = f_I(\mathbf{r}_1^I, \ldots, \mathbf{r}_i^I, \mathbf{s}_1^I, \mathbf{s}_j^I, \mathbf{t}_1^I, \mathbf{t}_k^I), \tag{9.1}$$

где f_I *— полярная форма сужения* F *на треугольник* Δ_I*.*

Как одно из приложений, теорема 9.2 позволяет получить решение задачи заполнения полигонального отверстия (см. рис. 10).

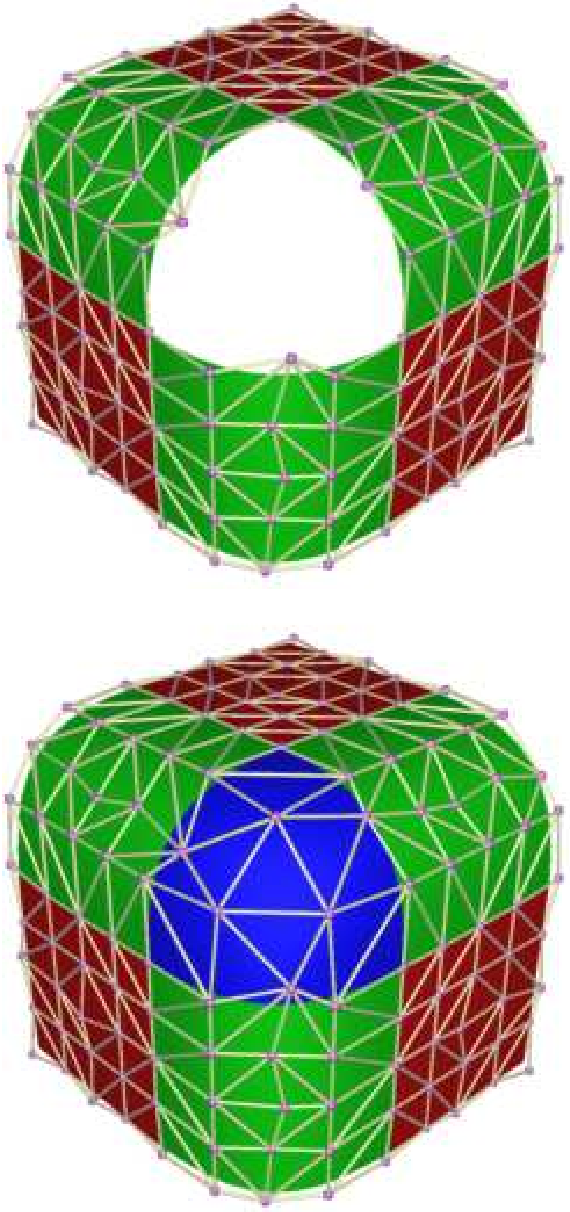

Рис. 10. Решение задачи заполнения полигонального отверстия с использованием треугольных B-сплайнов. Сначала кусочно-полиномиальная поверхность вокруг отверстия представляется, как линейная комбинация B-сплайнов (верхний рисунок). Затем полученная B-сплайн поверхность может быть доопределена таким образом, чтобы полученная поверхность, заполняющая отверстие, имела гладкость C^{n-1} (нижний рисунок). Отметим, что данный метод позволяет достичь непрерывности C^1, используя поверхности второй степени, и C^2 при третьей степени.

10. Историческая справка

Полярные формы являются классическим математическим инструментом при работе с полиномами. Для нужд геометрического моделирования данное средство первым применил Поль Кастельжо, работавший тогда в компании Ситроен [4, 5] и Лиль Рамшо [11–13]. В работе Кастельжо основное внимание уделялось кривым и поверхностям Безье, и особенно построению квази-интерполянтов [6]. Работы Рамшо имели гораздо более алгебраическую направленность.

Позже полярный подход к изучению сплайнов широко применялся многими исследователями. Зейдель [16] применяет полярные формы прямо к смешивающим функциям B-сплайнов и развивает теорию B-сплайнов с полярной точки зрения. Он также обсуждает взаимосвязь полярных форм и процедуры включения узла. Барри и Голдман [1, 9] связывают полярные формы с другими подходами к B-сплайнам и используют полярные формы для расширенного изучения процедуры включения узла. Ли [10] и Стром [21] также вносят вклад в эту область. Зейдель [20] использует геометрию полярных форм для применения их к изучению геометрически-непрерывных сплайнов. Распространение этого подхода на поверхности даётся в работе Шмельтса [15]. ДеРоуз предлагает рассматривать полярные формы, как абстрактные типы данных, и использует их как основу для программной системы [7]. Кроме этого, он использует полярные формы для вычисления кривизны и для составления полиномов.

Полярные формы позволили получить новые типы поверхностей. Зейдель [17] предлагает новое представление полиномиальной поверхности, так называемые B-порции, которые можно рассматривать, как двумерные аналоги отрезков B-сплайн кривых. Дамен, Миччелли и Зейдель [3] комбинируют B-порции с симплексными сплайнами и разрабатывают новый тип поверхностей, о котором говорилось в предыдущем пункте. Использование таких поверхностей обсуждалось в [8, 18]. Они позволяют моделировать гладкие кусочно-полиномиальные поверхности над произвольными триангуляциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Barry and R. N. Goldman. Algorithms for progressive curves: extending B-spline and blossoming techniques to the monomial, power, and newton dual bases. In R. N. Goldman and T. Lyche, editors, *Knot Insertion and Deletion Algorithms for* B-*Spline Modeling*. SIAM, 1992.

2. P. J. Barry, R. N. Goldman, L. Ramshaw, and H.-P. Seidel. *Blossoming: The New Polar-Form Approach to Spline Curves and Surfaces*, *SIGGRAPH '91 Course Notes #26*. ACM SIGGRAPH, 1991.

3. W. Dahmen, C. A. Micchelli, and H.-P. Seidel. Blossoming begets B-splines built better by B-patches. *Math. Comp.*, 59:97–115, 1992.

4. P. de Casteljau. Outillages méthodes calcul. Technical report, Andre Citroen, Paris, 1959.

5. P. de Casteljau. *Formes á Pôles*. Hermes, Paris, 1985.

6. P. de Casteljau. *Le Lissage*. Hermes, Paris, 1990.

7. T. DeRose, R. N. Goldman, and M. Lounsbery. A tutorial introduction to blossoming. In H. Hagen and D. Roller, editors, *Geometric Modelling, Methods and Applications*. Springer Verlag, 1991.

8. P. Fong. Shape control for B-splines over arbitrary triangulations. Master's thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1992.

9. R. N. Goldman. Blossoming and knot insertion algorithms for B-spline curves. *Computer-Aided Geom. Design*, 7:69–81, 1990.

10. E. T. Y. Lee. A note on blossoming. *Computer-Aided Geom. Design*, 6:359–362, 1989.

11. L. Ramshaw. Blossoming: A connect-the-dots approach to splines. Technical report, Digital Systems Research Center, Palo Alto, 1987.

12. L. Ramshaw. Béziers and B-splines as multiaffine maps. In *Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD*, pages 757–776. Springer, 1988.

13. L. Ramshaw. Blossoms are polar forms. *Computer-Aided Geom. Design*, 6:323–358, 1989.

14. A. Rockwood. A brief introduction to blossoming. In *Curve and Surface Design: From Geometry to Applications*, *SIGGRAPH'92 Course Notes #15*, pages 34–45. ACM SIGGRAPH, 1992.

15. G. Schmeltz. *Variationsreduzierende Kurvendarstellungen und Krümmungskriterien für Bézierflächen.* PhD thesis, TH Darmstadt, Germany, 1992.

16. H.-P. Seidel. A new multiaffine approach to B-splines. *Computer-Aided Geom. Design*, 6:23–32, 1989.

17. H.-P. Seidel. Symmetric recursive algorithms for surfaces: B-patches and the de Boor algorithm for polynomials over triangles. *Constr. Approx.*, 7:257–279, 1991.

18. H.-P. Seidel. Polar forms and triangular B-Spline surfaces. In *Euclidean Geometry and Computers.* World Scientific Publishing Co., 1992.

19. H.-P. Seidel. Representing piecewise polynomials as linear combinations of multivariate B-splines. In T. Lyche and L. L. Schumaker, editors, *Curves and Surfaces*, pages 559–566. Academic Press, 1992.

20. H.-P. Seidel. Polar forms for geometrically continuous spline curves of arbitrary degree. *ACM Trans. Graph.*, 12:1–34, 1993.

21. K. Strom. *Splines, Polynomials and Polar Forms.* PhD thesis, University of Oslo, Oslo, Norway, 1992.