ДИСКРЕТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА СФЕРИЧЕСКОГО ТИПА*

Н. В. Чашников
nik239@list.ru

30 октября 2010 г.

1°. Напомним определение дискретной поверхности Кунса, данное в [1].

Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Зафиксируем также натуральные числа r_1 и r_2. Обозначим через H_0^u и H_0^v фундаментальные дискретные периодические сплайны порядков r_1 и r_2 соответственно, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$\begin{aligned} H_0^u(kn_1) &= \delta_{m_1}(k), \qquad k \in 0 : m_1 - 1, \\ H_0^v(kn_2) &= \delta_{m_2}(k), \qquad k \in 0 : m_2 - 1. \end{aligned}$$

Пусть заданы наборы опорных вектор-функций

$$\mathbf{f}_0, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1},\, \mathbf{g}_0, \ldots, \mathbf{g}_{m_2-1} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3,$$

где вектор-функции $\mathbf{f}_i$ — N_2-периодические, $\mathbf{g}_j$ — N_1-периодические и выполнены условия согласования

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{1}$$

Дискретная поверхность Кунса определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u, v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u - in_1)\, \mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(v - jn_2)\, \mathbf{g}_j(u) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u - in_1)\, H_0^v(v - jn_2)\, \mathbf{g}_j(in_1). \end{aligned} \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В [1] показано, что для вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через $\mathbf{T}$ множество вектор-функций, зависящих от двух целочисленных аргументов, периодичных с периодом N_1 по первому аргументу, и с периодом N_2 — по второму. Ясно, что вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$, определяемая формулой (2), принадлежит множеству $\mathbf{T}$.

Обратимся к геометрической интерпретации вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$. Опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_j$ задают два набора замкнутых ломаных в трёхмерном пространстве. Условия согласования (1) означают, что каждая ломаная из первого набора пересекается с ломаной из второго набора. Обозначим через $\sigma(\mathbf{c})$ многогранную поверхность, состоящую из треугольных граней с вершинами

$$\mathbf{c}(u,v),\ \mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1),$$

и

$$\mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1),\ \mathbf{c}(u+1,v+1)$$

при всех целых u и v. Эта поверхность называется дискретной поверхностью Кунса. Согласно условиям (3), поверхность $\sigma(\mathbf{c})$ будет проходить через все опорные ломаные. Меняя опорные вектор-функции можно влиять на вид получаемой поверхности. Наиболее естественным образом строятся поверхности в виде замкнутых трубок. При этом ломаные $\mathbf{f}_i$ задают продольную форму трубки, а ломаные $\mathbf{g}_j$ — её поперечные сечения. Покажем, что при помощи дискретных поверхностей Кунса можно также строить многогранные поверхности, гомеоморфные сфере.

2°. Пусть числа m_1 и m_2 — чётные. Положим $k_1 = m_1/2$, $k_2 = m_2/2$, тогда $N_1/2 = k_1 n_1$, $N_2/2 = k_2 n_2$. Введём множество $\mathbf{S}$, состоящее из тех вектор-функций $\mathbf{a}(u,v)$ множества $\mathbf{T}$, которые удовлетворяют условиям

$$\mathbf{a}(u,0) \equiv \text{const}, \qquad \mathbf{a}(u, N_2/2) \equiv \text{const}; \tag{4}$$

$$\mathbf{a}(u,-v) = \mathbf{a}(u + N_1/2, v), \quad u, v \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Рассмотрим многогранную поверхность $\sigma(\mathbf{a})$ для $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$. Согласно тождествам (4) на поверхности выделяются вершины $\mathbf{a}(\cdot,0)$ и $\mathbf{a}(\cdot,N_2/2)$. Назовём эти вершины “Северным полюсом” и “Южным полюсом” соответственно. При каждом фиксированном u последовательность рёбер с вершинами $\big\{\mathbf{a}(u,v)\big\}_{v=0}^{N_2/2}$ образует “меридиан” от “Северного полюса” до “Южного полюса”. При каждом фиксированном $v \in 1 : N_2/2 - 1$ последовательность рёбер с вершинами $\big\{\mathbf{a}(u,v)\big\}_{u=0}^{N_1-1}$ образует замкнутую “параллель” (см. рис. 1). Из равенства (5) следует, что каждая из вершин $\mathbf{a}(u, v)$ при $u \in 0 : N_1 - 1$, $v \in N_2/2 + 1 : N_2 - 1$ совпадает вершиной $\mathbf{a}(u+N_1/2, N_2-v)$. Таким образом, для построения поверхности $\sigma(\mathbf{a})$ достаточно соединить рёбрами вершины $\mathbf{a}(u, v)$ при $u \in 0 : N_1 - 1$, $v \in 0 : N_2/2$.

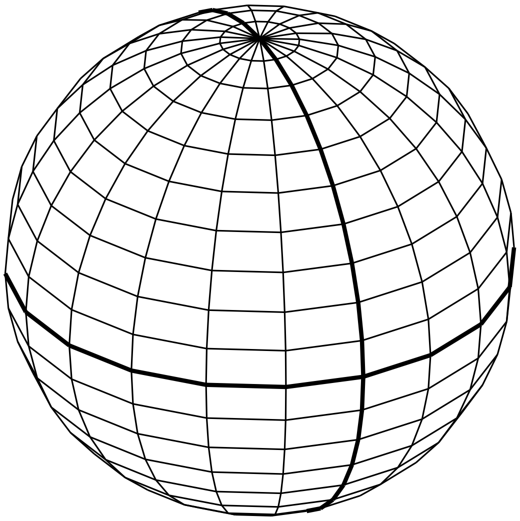

Рис. 1

ЛЕММА. *Фундаментальный сплайн H_0^v — чётная вещественная функция.*

Доказательство. Пусть $c(p)$, $p \in 0 : m_2 - 1$, — коэффициенты в разложении сплайна H_0^v по сдвигам B-сплайна:

$$H_0^v(v) = \sum_{p=0}^{m_2-1} c(p) Q_{r_2}(v - pn_2), \qquad v \in \mathbb{Z},$$

а $z = \delta_{m_2}$ — правые части интерполяционных условий для данного сплайна. Положим $C = \mathcal{F}_{m_2}(c)$, $Z = \mathcal{F}_{m_2}(z)$. Согласно [2, с. 22], значения $C(k)$ могут быть получены по формуле

$$C(k) = \frac{Z(k)}{T_{r_2}(k)}, \qquad k \in 0 : m_2 - 1,$$

где

$$T_{r_2}(k) = \begin{cases} n_2^{2r_2-1} & \text{при } k = 0, \\ \dfrac{1}{n_2} \displaystyle\sum_{s=0}^{n_2-1} \left(\frac{\sin(\pi k/m_2)}{\sin\bigl(\pi(sm_2 + k)/N_2\bigr)} \right)^{2r_2} & \text{при } k \in 1 : m_2 - 1. \end{cases}$$

В данной задаче $z = \delta_{m_2}$, поэтому $Z(k) \equiv 1$. Сигнал T_{r_2} вещественный и чётный (см. [2, задача 3.4]), следовательно, сигнал C также вещественный и чётный. Значит, коэффициенты $c(p)$ вещественны и образуют чётный сигнал. Отсюда сразу вытекает вещественность сплайна H_0^v. Чтобы установить чётность сплайна H_0^v, достаточно сослаться на задачу 3.10 из [2]. □

Будем считать, что последовательности опорных функций $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{g}_j$ периодически продолжены на все целые индексы с периодами m_1 и m_2 соответственно. Тогда равенства (1) и (3) выполняются для всех целых i и j.

ТЕОРЕМА. *Чтобы вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *построенная по формуле* (2), *принадлежала множеству* $\mathbf{S}$ *необходимо и достаточно, чтобы опорные вектор-функции* $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ *удовлетворяли соотношениям*

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_0(u) \equiv \mathrm{const}, && \mathbf{g}_{k_2}(u) \equiv \mathrm{const}; \\ &\mathbf{g}_{-j}(u) = \mathbf{g}_j(u + N_1/2), && j,\, u \in \mathbb{Z}; \\ &\mathbf{f}_i(-v) = \mathbf{f}_{i+k_1}(v), && i,\, v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ принадлежит множеству $\mathbf{S}$. Из условия (3) следует, что $\mathbf{g}_0(u) = \mathbf{c}(u,0)$ и $\mathbf{g}_{k_2}(u) = \mathbf{c}(u, N_2/2)$, а в силу (4) вектор-функции в правых частях не зависят от u.

Используя равенства (3) и условие (5), получаем

$$\mathbf{g}_{-j}(u) = \mathbf{c}(u, -jn_2) = \mathbf{c}(u + N_1/2, jn_2) = \mathbf{g}_j(u + N_1/2).$$

Аналогично проверяется последнее тождество в (6):

$$\mathbf{f}_i(-v) = \mathbf{c}(in_1, -v) = \mathbf{c}(in_1 + k_1 n_1, v) = \mathbf{f}_{i+k_1}(v).$$

Достаточность. Пусть опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ удовлетворяют условиям (6). Справедливость соотношений (4) следует из (6) и (3):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,0) &= \mathbf{g}_0(u) \equiv \mathrm{const}, \\ \mathbf{c}(u, N_2/2) &= \mathbf{g}_{k_2}(u) \equiv \mathrm{const}\,. \end{aligned}$$

Проверим тождество (5). По определению вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u,-v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u - in_1)\,\mathbf{f}_i(-v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(-v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(u) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u - in_1)\,H_0^v(-v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(in_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим суммы в правой части (7) по отдельности. Для первой суммы в силу (6) имеем

$$\sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u - in_1)\,\mathbf{f}_i(-v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u\big(u + k_1n_1 - (i+k_1)n_1\big)\,\mathbf{f}_{i+k_1}(v) = \\ = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u + k_1n_1 - in_1)\,\mathbf{f}_i(v).$$

Во второй сумме заменим j на $-j$ и воспользуемся чётностью функции H_0^v и условиями (6):

$$\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(-v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(u) = \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(-v + jn_2)\,\mathbf{g}_{-j}(u) = \\ = \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(u + N_1/2).$$

Преобразуем двойную сумму из (7), заменив i на $i+k_1$, j на $-j$ и учтя равенства (6) и чётность H_0^v:

$$\sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u - in_1)\,H_0^v(-v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(in_1) = \\ = \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u\big(u - (i+k_1)n_1\big)\,H_0^v(-v + jn_2)\,\mathbf{g}_{-j}\big((i+k_1)n_1\big) = \\ = \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u + N_1/2 - in_1)\,H_0^v(v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(in_1).$$

Подставляя полученные выражения в правую часть равенства (7), получаем

$$\mathbf{c}(u,-v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_0^u(u + k_1n_1 - in_1)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^v(v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(u + N_1/2) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_0^u(u + N_1/2 - in_1)\,H_0^v(v - jn_2)\,\mathbf{g}_j(in_1) = \mathbf{c}(u + N_1/2, v).$$

Теорема доказана. □

Поверхности, определяемые вектор-функцией $\mathbf{c}(u,v)$ вида (2), принадлежащей множеству $\mathbf{S}$, будем называть *дискретными поверхностями Кунса сферического типа.*

Покажем, как построить наборы опорных вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$, удовлетворяющих и условиям согласования (1), и условиям (6). Пусть заданы значения постоянных вектор-функций $\mathbf{g}_0$ и $\mathbf{g}_{k_2}$, а также вектор-функции $\mathbf{g}_j$ при $j \in 1 : k_2 - 1$ и значения $\mathbf{f}_i(v)$ при $i \in 0 : m_1 - 1$, $v \in 0 : N_2/2$, причём выполняются условия

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : k_2.$$

Доопределим оставшиеся значения вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ таким образом, чтобы были истинны условия (6):

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_i(v) = \mathbf{f}_{i+k_1}(N_2 - v), && i \in 0 : m_1 - 1, && v \in N_2/2 + 1 : N_2 - 1; \\ &\mathbf{g}_j(u) = \mathbf{g}_{m_2 - j}(u + N_1/2), && j \in k_1 + 1 : m_1 - 1, && u \in 0 : N_1 - 1. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для полученных вектор-функций справедливы равенства (1). Действительно, при $j \in 0 : k_2$ равенство $\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1)$ выполняется по условию. При $j \in k_2 + 1 : m_2 - 1$ имеем

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{f}_{i+k_1}\big((m_2 - j)n_2\big) = \mathbf{g}_{m_2-j}\big((i + k_1)n_1\big) = \mathbf{g}_j(in_1).$$

ПРИМЕР. Пусть $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $n_1 = 3$, $n_2 = 7$, $r_1 = r_2 = 3$. На рис. 2 приведён пример дискретной поверхности Кунса сферического типа. Остовные кривые выделены жирными линиями.

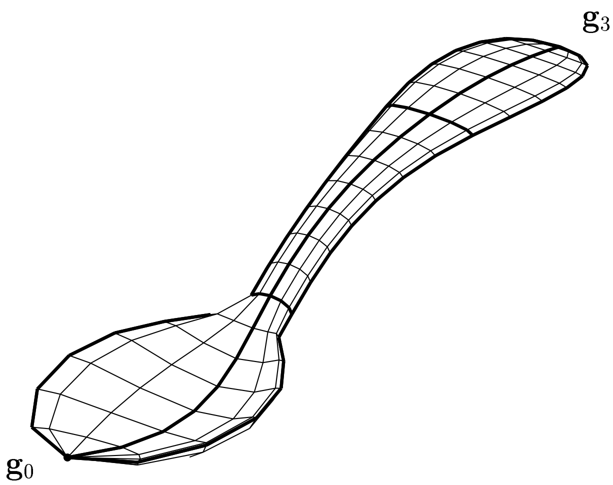

Рис. 2. Ложка

На рис. 3 приведён другой пример дискретной поверхности Кунса сферического типа. Здесь $m_1 = 4$, $m_2 = 10$, $n_1 = 11$, $n_2 = 4$, $r_1 = r_2 = 3$.

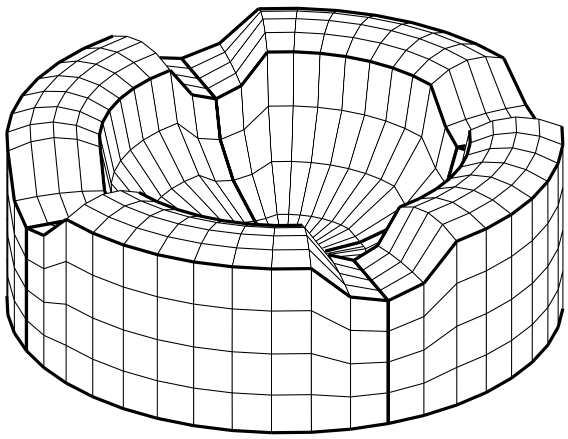

Рис. 3. Пепельница

3°. Положим

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) := \sum_{i=0}^{r_1}(-1)^{r_1-i}\,C_{r_1}^{i}\,\sum_{j=0}^{r_2}(-1)^{r_2-j}\,C_{r_2}^{j}\,\mathbf{a}(u+i,v+j)$$

и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\right\|^2 \to \inf,\\ \mathbf{a}(\cdot, jn_2) = \mathbf{g}_j, \qquad j \in 0:m_2-1,\\ \mathbf{a}(in_1,\cdot) = \mathbf{f}_i, \qquad i \in 0:m_1-1,\\ \mathbf{a}\in\mathbf{T}.\end{gathered} \tag{8}$$

В [1] доказано, что единственным решением задачи (8) является вектор-функция дискретной поверхности Кунса, определяемая формулой (2).

Предположим, что опорные вектор-функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$ удовлетворяют условиям (6). Тогда по теореме вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ принадлежит множеству $\mathbf{S}$. Следовательно, $\mathbf{c}(u,v)$ является единственным решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered}\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\right\|^2 \to \inf,\\ \mathbf{a}(\cdot, jn_2) = \mathbf{g}_j, \qquad j \in 0:m_2-1,\\ \mathbf{a}(in_1,\cdot) = \mathbf{f}_i, \qquad i \in 0:m_1-1,\\ \mathbf{a}\in\mathbf{S}.\end{gathered}$$

4°. Пусть заданы чётные числа $m_1 = 2k_1$, $m_2 = 2k_2$, набор непрерывных вектор-функций
$$\mathbf{F}_0,\ \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m_1-1}\colon [0, k_2] \to \mathbb{R}^3,$$
и набор m_1-периодических непрерывных вектор-функций
$$\mathbf{G}_0,\ \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{k_2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$
Предположим, что вектор-функции $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{G}_j$ удовлетворяют условиям
$$\begin{gathered} \mathbf{G}_0(x) \equiv \mathrm{const}, \quad \mathbf{G}_{k_2}(x) \equiv \mathrm{const}, \\ \mathbf{F}_i(j) = \mathbf{G}_j(i), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : k_2. \end{gathered} \tag{9}$$
Доопределим наборы вектор-функций по формулам
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(y) &= \mathbf{F}_{i+k_1}(m_2 - y), && i \in 0 : m_1 - 1, && y \in (k_2, m_2]; \\ \mathbf{G}_j(x) &= \mathbf{G}_{m_2-j}(x + k_1), && j \in k_1 + 1 : m_1 - 1, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Проверим, что равенство $\mathbf{F}_i(j) = \mathbf{G}_j(i)$ справедливо и при $i \in 0 : m - 1$, $j \in k_2 + 1 : m_2 - 1$. Действительно,
$$\mathbf{F}_i(j) = \mathbf{F}_{i+k_1}(m_2 - j) = \mathbf{G}_{m_2-j}(i + k_1) = \mathbf{G}_j(i).$$
Кроме того, при $i \in 0 : m_1 - 1$ имеет место тождество
$$\mathbf{F}_i(m_2) = \mathbf{F}_{i+k_1}(0) = \mathbf{G}_0(i + k_1) = \mathbf{G}_0(i) = \mathbf{F}_i(0),$$
поэтому вектор-функции $\mathbf{F}_i$ можно периодически продолжить на $\mathbb{R}$ с периодом m_2, сохранив непрерывность.

Итак, заданы наборы непрерывных вектор-функций
$$\begin{gathered} \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m_1-1}, \\ \mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{m_2-1}, \end{gathered}$$
удовлетворяющих условиям
$$\mathbf{F}_i(j) = \mathbf{G}_j(i), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1. \tag{10}$$
Для натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, проведём дискретизацию вектор-функций $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{G}_j$:
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,n_2}(v) &:= \mathbf{F}_i\bigl(\tfrac{v}{n_2}\bigr), && i \in 0 : m_1 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}; \\ \mathbf{g}_{j,n_1}(u) &:= \mathbf{G}_j\bigl(\tfrac{u}{n_1}\bigr), && j \in 0 : m_2 - 1, \quad u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Полученные наборы опорных вектор-функций удовлетворяют как условиям согласования (1), так и условиям (6). Построим вектор-функцию $\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ по формуле (2) для данных опорных вектор-функций. По теореме вектор-функция $\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ будет принадлежать множеству $\mathbf{S}$. В [3] доказано, что при неограниченном увеличении n_1 и n_2 дискретные функции $\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ сходятся к предельной вектор-функции $\mathbf{c}_*$:

$$\mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor xn_1 \rfloor, \lfloor yn_2 \rfloor\big) \xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{} \mathbf{c}_*(x,y) \qquad \text{равномерно по } x, y \in \mathbb{R}.$$

Значит, дискретные поверхности Кунса $\sigma(c_{n_1,n_2})$ сходятся к поверхности, определяемой функцией $\mathbf{c}_*(x,y)$ при $x \in [0, m_1]$, $y \in [0, k_2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Чашников. *Экстремальное свойство дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 14 марта 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0314`)

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.

3. Н. В. Чашников. *Предел дискретных поверхностей Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 5 декабря 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1205`)