ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

25 июня 2008 г.

1°. Пусть $N = mn$, где m, n — натуральные числа, отличные от единицы. Мы будем использовать следующие обозначения из [1]:
$\widetilde{Q}_r$ — дискретный нормализованный N-периодический B-сплайн порядка r;
$\widetilde{S}_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \widetilde{Q}_r(j-pn)$ — дискретный N-периодический сплайн порядка r, построенный по полюсам $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ из $\mathbb{R}^s$.

Пусть $s = 2$. Значения сплайна $\widetilde{S}_r(j)$ при $j \in 0 : N-1$ образуют набор точек на плоскости. Если соединить соседние точки сплайна отрезками (при этом $\widetilde{S}_r(N-1)$ соединяется с $\widetilde{S}_r(0) = \widetilde{S}_r(N)$), мы получим замкнутую N-звенную ломаную. При достаточно больших значениях N построенные ломаные можно использовать для моделирования замкнутых кривых.

Положим $r = 2$, $m = 8$, $n = 10$. На рис. 1 изображены полюсы $a_0, a_1, \ldots, a_7$ и значения построенного по ним дискретного периодического сплайна. Замкнутая ломаная, полученная путём соединения соседних точек сплайна отрезками, показана на рис. 2.

Значения B-сплайна $\widetilde{Q}_2(j)$ при $j \in 0 : N-1$ отличны от нуля только если $j < 2n$ или $j > N-2n$. Поэтому при изменении одного полюса изменится только локальный участок ломаной, задаваемой сплайном. На рис. 3 пунктирной кривой показан сплайн, получающийся при замене полюса a_3 на a_3'.

Порядок расположения полюсов оказывает существенное влияние на вид сплайна. На рис. 4 пунктирной линией изображён сплайн, получающийся при перестановке полюсов a_3 и a_4.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

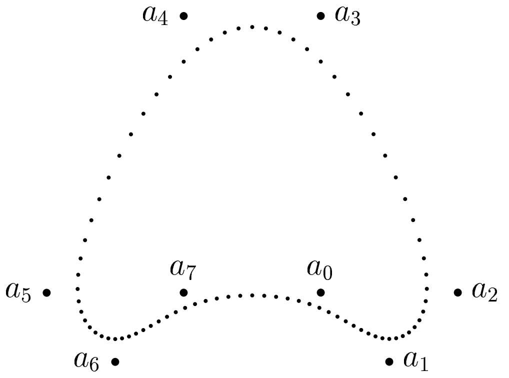

Рис. 1. Полюсы и значения сплайна

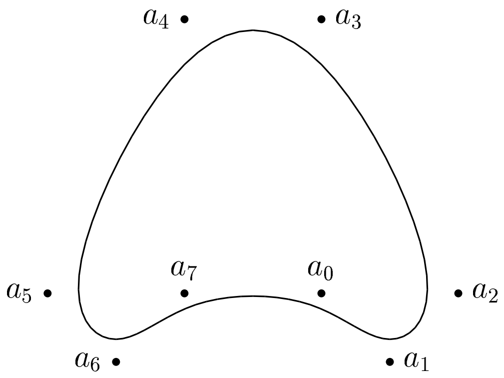

Рис. 2. Замкнутая ломаная

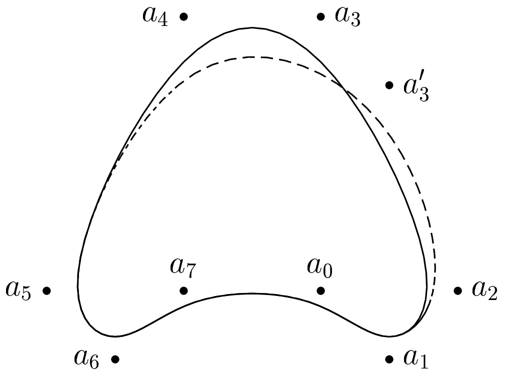

Рис. 3. Изменение полюса

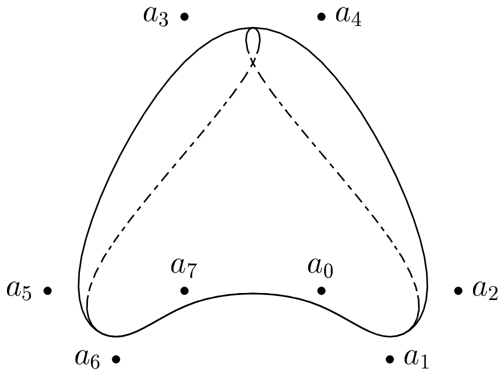

Рис. 4. Изменение порядка полюсов

2°. В [1] показано, как построить сплайн $\widetilde{S}_r$, решающий задачу векторной интерполяции
$$\widetilde{S}_r(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1,$$
где $z(0), z(1), \ldots, z(m-1) \in \mathbb{R}^s$ — заданные векторы.

Используя интерполяционные сплайны, можно строить замкнутые ломаные, проходящие через заданные точки. При этом число n определяет количество отрезков ломаной, лежащих между двумя соседними точками интерполяции. Увеличивая n, можно получить более гладкую ломаную, проходящую через те же точки интерполяции.

Положим $r = 2$, $m = 16$. На рис. 5 и рис. 6 изображены интерполяционные сплайны для одного и того же набора векторов $z(0), z(1), \ldots, z(15)$, показанных жирными точками. При этом сплайн на рис. 5 построен при $n = 4$, а на рис. 6 — при $n = 10$.

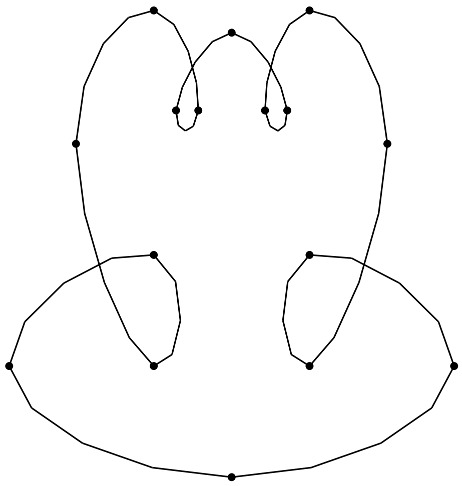

Рис. 5. Сплайн «Петли», $n = 4$

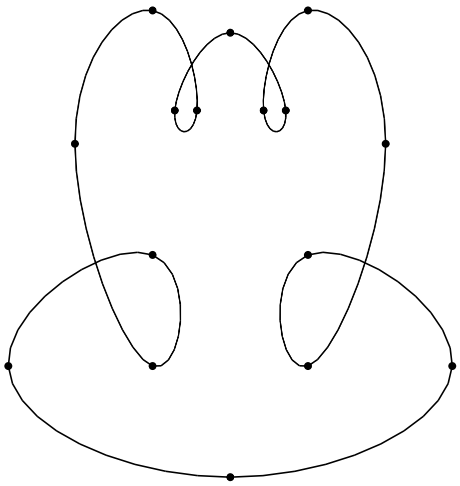

Рис. 6. Сплайн «Петли», $n = 10$

Порядок сплайна r тоже влияет на вид получающейся ломаной. На рис. 7 кроме сплайна «Петли» порядка 2 (рис. 6) пунктирной линией изображён сплайн порядка 3, построенный по тем же точкам интерполяции с тем же значением n.

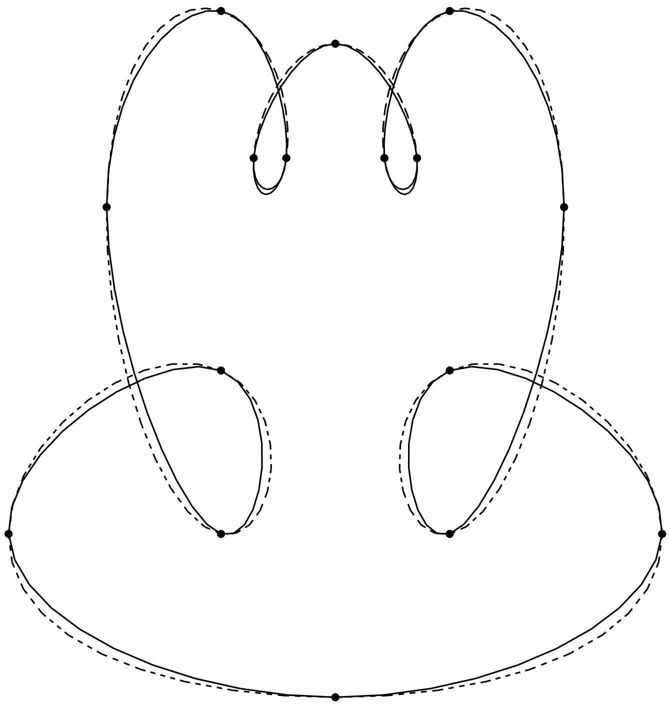

Рис. 7. Сплайн «Петли», $r = 2$ и $r = 3$

Задавая нужным образом точки интерполяции, можно получить замкнутую ломаную сколь угодно сложной формы. На рис. 8 изображён сплайн «Овалы», построенный по 12 точкам интерполяции, при $r = 2$, $n = 16$.

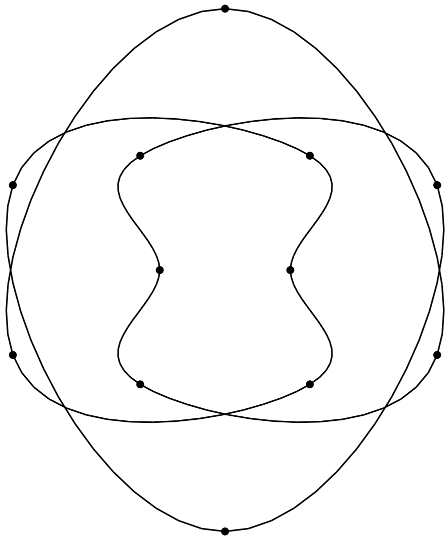

Рис. 8. Сплайн «Овалы»

3°. Дискретные периодические сплайны позволяют строить замкнутые кривые с острыми углами.

На рис. 9 представлен интерполяционный сплайн с тремя острыми углами. Можно получить ещё два острых угла, если перемещать точку b вправо. Петли a и c сначала становятся у́же (рис. 10), а затем переходят в острые углы (рис. 11).

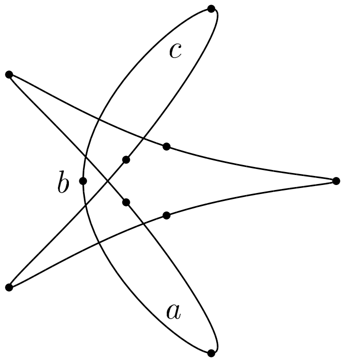

Рис. 9. Исходный сплайн

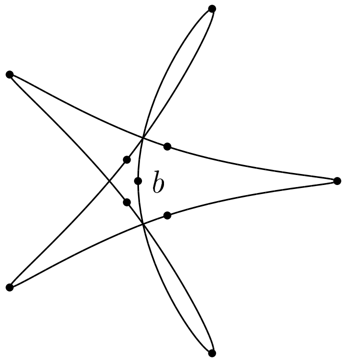

Рис. 10. Узкие петли

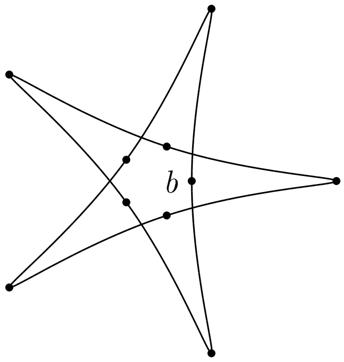

Рис. 11. Острые углы

Аналогичным образом можно получить сплайн с ещё более острым углом, а также сплайн, в котором вершина угла не является точкой интерполяции (см. рис. 12).

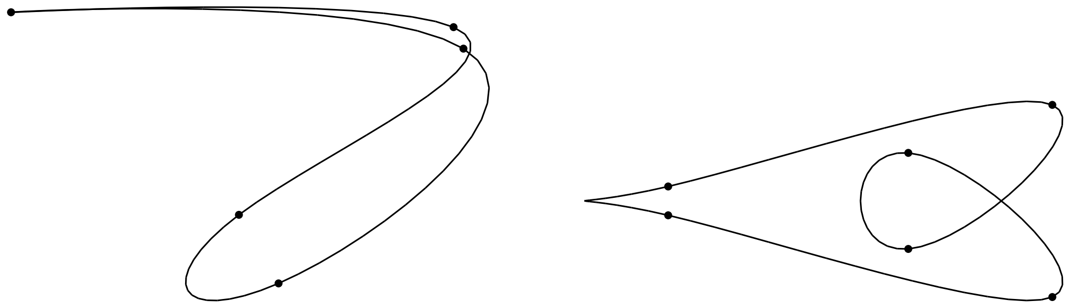

Рис. 12. Сплайны с острыми углами

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`)