СХОДИМОСТЬ СХЕМЫ SUBDIVISION*

Н. В. Чашников
nikolay.chashnikov@gmail.com

3 декабря 2011 г.

Данный доклад основан на книге [1]. Приведены необходимые и достаточные условия сходимости стационарной схемы subdivision для функций одной переменной.

1°. Пусть задана последовательность вещественных чисел $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в которой лишь конечное число членов отлично от нуля. Пусть также задана начальная последовательность векторов $\{\mathbf{p}_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из пространства $\mathbb{R}^n$, в которой только конечное число членов отлично от нуля. Определим последовательности векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, при помощи рекуррентного соотношения

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_{l-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Такой метод построения последовательностей векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$ называется *стационарной схемой subdivision с маской* $\{s_k\}$. Векторы $\mathbf{p}_k^m$ называются контрольными точками; $\{\mathbf{p}_k^0\}$ — начальный набор контрольных точек.

В некоторых случаях удобно рассматривать вместо последовательностей чисел и векторов производящие функции. Маске $\{s_k\}$ соответствует производящая функция

$$s(z) = \sum_k s_k\, z^k,$$

а набору контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^m\}$ — производящая функция

$$\mathbf{p}^m(z) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, z^k.$$

Здесь и далее мы будем опускать пределы суммирования, если суммирование ведётся по всем целым индексам. В действительности в каждой сумме лишь

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

конечное число членов отлично от нуля, так что вопросы сходимости не возникают.

Соотношение (1) эквивалентно соотношению для производящих функций (см. доказательство теоремы 2 в [2])

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\,\mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

2°. Положим

$$\widehat{N}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Справедливость следующих тождеств проверяется непосредственно:

$$\sum_j \widehat{N}(t - j) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\widehat{N}(t) = \tfrac{1}{2}\widehat{N}(2t - 1) + \widehat{N}(2t) + \tfrac{1}{2}\widehat{N}(2t + 1), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

При $m \geqslant 0$ определим вектор-функцию $\mathbf{P}^m$ по формуле

$$\mathbf{P}^m(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $\mathbf{P}^m(t)$ является непрерывной кусочно-линейной функцией, принимающей значения $\mathbf{p}_k^m$ в точках $\frac{k}{2^m}$.

ЛЕММА. *Пусть заданы схема subdivision с маской $\{s_k\}$ и начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Положим*

$$K = \max\bigl\{|k| \ \mid\ s_k \neq 0\bigr\}, \qquad a_0 = \max\bigl\{|k| \ \mid\ \mathbf{p}_k^0 \neq 0\bigr\}.$$

Тогда носители вектор-функций $\mathbf{P}^m$ ограничены в совокупности:

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(K + a_0 + 1), K + a_0 + 1], \quad m \geqslant 0.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$a_m = \max\{|k| \ \mid\ \mathbf{p}_k^m \neq 0\}, \quad m \geqslant 1.$$

При $m = 0$ данное обозначение согласуется с обозначением a_0 из формулировки леммы.

Зафиксируем натуральное m и рассмотрим рекуррентное соотношение (1) при целых k. Слагаемое в правой части может быть отлично от нуля только если индекс l удовлетворяет условиям $|l| \leqslant a_{m-1}$ и $|k-2l| \leqslant K$. Поэтому если в сумме есть ненулевые слагаемые, то пересечение отрезков

$$[-a_{m-1},\, a_{m-1}] \quad \text{и} \quad \left[\tfrac{k-K}{2},\, \tfrac{k+K}{2}\right]$$

непусто. Или, что то же самое, расстояние между центрами этих отрезков (числа 0 и $k/2$ соответственно) не превосходит полусуммы их длин, то есть

$$|k/2| \leqslant a_{m-1} + \tfrac{K}{2}.$$

Следовательно,

$$a_m \leqslant 2a_{m-1} + K.$$

Последовательно применяя полученное неравенство, запишем

$$2^{-m}a_m \leqslant 2^{m-1}a_{m-1} + 2^{-m}K \leqslant 2^{m-2}a_{m-2} + 2^{-(m-1)}K + 2^{-m}K \leqslant$$
$$\leqslant \cdots \leqslant a_0 + \sum_{j=1}^{m} 2^{-j}K < a_0 + K.$$

Рассмотрим определение вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$. Носителем функции $\widehat{N}(t)$ является отрезок $[-1,1]$. Поэтому значение $\widehat{N}(2^m t - k)$ может быть отлично от нуля, только если t принадлежит отрезку $[2^{-m}(k-1), 2^{-m}(k+1)]$. Носитель функции $\mathbf{P}^m(t)$ содержится в объединении таких отрезков по всем k из множества $-a_m : a_m$, то есть

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-2^{-m}(a_m+1),\, 2^{-m}(a_m+1)] \subset [-(a_0+K) - 2^{-m},\, a_0 + K + 2^{-m}].$$

Значит, для всех m справедливо включение

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}^m \subset [-(K + a_0 + 1), K + a_0 + 1].$$

Лемма доказана. □

3°. Схема subdivision называется *сходящейся*, если для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ равномерно сходится. Будем называть схему subdivision *вырожденной*, если для любого начального набора контрольных точек последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ равномерно сходится к вектор-функции, тождественно равной нулю.

Обозначим через $\mathbf{P}$ предел последовательности вектор-функций $\mathbf{P}^m$. Очевидно, что вектор-функция $\mathbf{P}(t)$ непрерывна. Из леммы следует, что носитель вектор-функции $\mathbf{P}(t)$ ограничен. Кроме того, справедливо неравенство

$$\max_k \|\mathbf{p}_k^m - \mathbf{P}(2^{-m}k)\| = \max_k \|\mathbf{P}^m(2^{-m}k) - \mathbf{P}(2^{-m}k)\| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{P}^m(t) - \mathbf{P}(t)\|.$$

Значит, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \max_k \|\mathbf{p}_k^m - \mathbf{P}(2^{-m}k)\| = 0. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится и невырождена. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_k s_{2k} = \sum_k s_{2k+1} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Возьмём такой начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$, для которого предельная вектор-функция $\mathbf{P}(t)$ не равна тождественно нулю. Тогда найдётся натуральное число M и целое число j такие, что $\mathbf{P}(2^{-M}j) \neq 0$.

Зафиксируем целые числа $d \in 0 : 1$ и $m > M$. В силу рекуррентного соотношения (1) имеем

$$\mathbf{p}^m_{2^{m-M}j+d} = \sum_k s_{2^{m-M}j+d-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1} = \sum_i s_{2i+d}\, \mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}j-i}.$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\mathbf{P}(2^{-M}j + 2^{-m}d) - \sum_i s_{2i+d}\, \mathbf{P}(2^{-M}j - 2^{-m+1}i) =$$
$$= \big[\mathbf{P}(2^{-M}j + 2^{-m}d) - \mathbf{p}^m_{2^{m-M}j+d}\big] + \sum_i s_{2i+d}\big[\mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}j-i} - \mathbf{P}(2^{-M}j - 2^{-m+1}i)\big].$$

Согласно предельному соотношению (5), первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $m \to \infty$. Аналогично разность

$$\mathbf{p}^{m-1}_{2^{m-M-1}j-i} - \mathbf{P}(2^{-M}j - 2^{-m+1}i)$$

также стремится к нулю, а так как коэффициенты s_{2i+d} отличны от нуля только для конечного числа индексов i, то и вся правая часть стремится к нулю. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в левой части и пользуясь непрерывностью вектор-функции $\mathbf{P}(t)$, получаем

$$\mathbf{P}(2^{-M}j)\Big(1 - \sum_i s_{2i+d}\Big) = 0.$$

Осталось заметить, что $\mathbf{P}(2^{-M}j)$ отлично от нуля, поэтому

$$\sum_i s_{2i+d} = 1$$

при $d = 0$ и $d = 1$, что и требовалось. $\square$

4°. Положим

$$\Delta\mathbf{p}_k^m = \mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_{k-1}^m, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Производящая функция для последовательности $\{\Delta\mathbf{p}_k^m\}$ имеет вид

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для маски* $\{s_k\}$ *выполняется условие* (6). *Если для любого начального набора контрольных точек найдутся такие числа* $c > 0$ *и* $\gamma \in (0,1)$, *что для всех неотрицательных целых* m *выполняется неравенство*

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| \leqslant c\,\gamma^m, \tag{7}$$

то схема subdivision сходится.

Доказательство. Напомним, что

$$K = \max\bigl\{|k| \mid s_k \neq 0\bigr\}.$$

Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Положим

$$\varepsilon_m = \max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\|, \quad m \geqslant 0.$$

По условию теоремы найдутся такие числа $c > 0$ и $\gamma \in (0,1)$, что $\varepsilon_m \leqslant c\,\gamma^m$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$.

Для вещественного t и натурального m на основании тождества (4) запишем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^m(t) - \mathbf{P}^{m-1}(t) &= \sum_k \mathbf{p}_k^m\,\widehat{N}(2^m t - k) - \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\,\widehat{N}(2^{m-1} t - k) = \\
&= \sum_k \mathbf{p}_{2k}^m\,\widehat{N}(2^m t - 2k) + \sum_k \mathbf{p}_{2k+1}^m\,\widehat{N}(2^m t - 2k - 1) - \\
&- \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\bigl[\tfrac12\widehat{N}(2^m t - 2k - 1) + \widehat{N}(2^m t - 2k) + \tfrac12\widehat{N}(2^m t - 2k + 1)\bigr] = \\
&= \sum_k (\mathbf{p}_{2k}^m - \mathbf{p}_k^{m-1})\widehat{N}(2^m t - 2k) + \sum_k \bigl[\mathbf{p}_{2k+1}^m - \tfrac12(\mathbf{p}_k^{m-1} + \mathbf{p}_{k+1}^{m-1})\bigr]\widehat{N}(2^m t - 2k - 1).
\end{aligned}$$

Оценим коэффициенты при $\widehat{N}$ в последних суммах. Пользуясь рекуррентным соотношением (1) и условием (6), получаем

$$\mathbf{p}_{2k}^m - \mathbf{p}_k^{m-1} = \sum_l s_{2k-2l}\,\mathbf{p}_l^{m-1} - \sum_l s_{2k-2l}\,\mathbf{p}_k^{m-1} = \sum_l s_{2k-2l}(\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_k^{m-1}).$$

Коэффициент s_{2k-2l} может быть отличен от нуля только если $2|k-l| \leqslant K$. Для таких индексов l справедливо неравенство

$$\|\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_k^{m-1}\| \leqslant |k-l|\,\varepsilon_{m-1} \leqslant \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{m-1}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\|\mathbf{p}_{2k}^m - \mathbf{p}_k^{m-1}\| \leqslant \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{m-1}\sum_l |s_{2l}|.$$

Воспользовавшись равенствами (1) и (6), запишем

$$\mathbf{p}_{2k+1}^m - \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_k^{m-1} + \mathbf{p}_{k+1}^{m-1}) = \sum_l s_{2k+1-2l}\,\mathbf{p}_l^{m-1} - \tfrac{1}{2}\sum_l s_{2k+1-2l}(\mathbf{p}_k^{m-1} + \mathbf{p}_{k+1}^{m-1}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_l s_{2k+1-2l}(\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_k^{m-1} + \mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_{k+1}^{m-1}).$$

Коэффициент $s_{2k+1-2l}$ может быть отличен от нуля только если $2|k-l| \leqslant K+1$. Для таких индексов l справедливы неравенства

$$\|\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_k^{m-1}\| \leqslant \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{m-1}, \qquad \|\mathbf{p}_l^{m-1} - \mathbf{p}_{k+1}^{m-1}\| \leqslant (\tfrac{K}{2}+1)\varepsilon_{m-1}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\|\mathbf{p}_{2k+1}^m - \tfrac{1}{2}(\mathbf{p}_k^{m-1} + \mathbf{p}_{k+1}^{m-1})\| \leqslant \tfrac{K+1}{2}\,\varepsilon_{m-1}\sum_l |s_{2l+1}|.$$

Положим

$$C = \max\Big\{\tfrac{K}{2}\sum_l |s_{2l}|,\ \tfrac{K+1}{2}\sum_l |s_{2l+1}|\Big\}.$$

Используя доказанные оценки и тождество (3), получаем

$$\|\mathbf{P}^m(t) - \mathbf{P}^{m-1}(t)\| \leqslant \sum_k C\,\varepsilon_{m-1}\,|\widehat{N}(2^m\,t - 2k)| +$$
$$+ \sum_k C\,\varepsilon_{m-1}\,|\widehat{N}(2^m\,t - 2k - 1)| = \sum_k C\,\varepsilon_{m-1}\,\widehat{N}(2^m\,t - k) = C\,\varepsilon_{m-1}.$$

В силу произвольности выбора t имеем оценку в норме пространства $C(\mathbb{R})$:

$$\|\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}\| \leqslant C\,\varepsilon_{m-1}.$$

Данное неравенство выполняется при всех натуральных m, поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}\| \leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_{m-1} \leqslant C\,c\sum_{m=0}^{\infty}\gamma^m = \frac{C\,c}{1-\gamma}.$$

В частности, сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}).$$

Значит, последовательность его частичных сумм имеет предел. Положим

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 + \lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}(\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}).$$

Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{M}(\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^{m-1}) = \mathbf{P}^M - \mathbf{P}^0.$$

Следовательно, вектор-функция $\mathbf{P}$ является пределом последовательности вектор-функций $\mathbf{P}^m$.

Теорема доказана. $\square$

5°. Перепишем равенства (6) при помощи производящей функции $s(z)$:

$$1 = \sum_k s_{2k} = \frac{s(1)+s(-1)}{2},$$
$$1 = \sum_k s_{2k+1} = \frac{s(1)-s(-1)}{2}.$$

Полученные равенства эквивалентны условиям

$$s(1) = 2, \quad s(-1) = 0. \tag{8}$$

Предположим, что условия (8) выполнены. Так как среди коэффициентов s_k лишь конечное число отлично от нуля, то при некотором M функция $s(z)z^M$ будет полиномом. Число -1 является корнем этого полинома, поэтому он делится на $1+z$. Обозначим частное от деления на $(1+z)z^M$ через $d(z)$. Имеем $s(z) = (1+z)d(z)$, где

$$d(z) = \sum_k d_k\, z^k$$

и среди коэффициентов d_k лишь конечное число отлично от нуля.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть r — натуральное число. Рассмотрим функцию*

$$\prod_{j=0}^{r-1} d(z^{2^j}) = \sum_k \tilde{d}_k\, z^k =: \tilde{d}(z).$$

Предположим, что выполняется условие

$$\delta := \max_k \sum_l |\tilde{d}_{k-2^r l}| < 1. \tag{9}$$

Тогда для любого начального набора контрольных точек существуют числа $c > 0$ *и* $\gamma \in (0, 1)$*, при которых справедливо неравенство* (7).

Доказательство. Пусть начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ фиксирован. Пользуясь тождеством (2), выведем рекуррентную формулу для производящих функций $\Delta\mathbf{p}^m(z)$:

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z) = (1-z)s(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = (1-z^2)d(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \\ = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2).$$

Пусть $m \geqslant r$. Применим полученную формулу r раз:

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = d(z)\, d(z^2)\Delta\mathbf{p}^{m-2}(z^4) = \cdots = \tilde{d}(z)\Delta\mathbf{p}^{m-r}(z^{2^r}).$$

Перепишем производящие функции в виде сумм:

$$\sum_k \Delta\mathbf{p}_k^m z^k = \sum_j \tilde{d}_j z^j \sum_l \Delta\mathbf{p}_l^{m-r} z^{2^r l} = \sum_j \sum_l \tilde{d}_j\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-r} z^{j+2^r l}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z, придём к равенству

$$\Delta\mathbf{p}_k^m = \sum_l \tilde{d}_{k-2^r l}\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-r}. \tag{10}$$

Положим для $m \geqslant 0$

$$\varepsilon_m = \max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\|.$$

В силу условия (9) равенство (10) при $m \geqslant r$ даёт оценку

$$\varepsilon_m \leqslant \sum_l |\tilde{d}_{k-2^r l}| \max_j \Delta\mathbf{p}_j^{m-r} \leqslant \delta\, \varepsilon_{m-r}.$$

Применяя данное неравенство $\lfloor m/r \rfloor$ раз, получаем

$$\varepsilon_m \leqslant \delta^{\lfloor m/r \rfloor}\, \varepsilon_{m-r\lfloor m/r \rfloor}.$$

Заметим, что индекс $m - r\lfloor m/r \rfloor$ принадлежит промежутку $0 : r-1$. Определим константы c и γ следующим образом:

$$c = \tfrac{1}{\delta} \max_{k \in 0:r-1} \varepsilon_k, \qquad \gamma = \delta^{\frac{1}{r}}.$$

Имеем

$$\varepsilon_m \leqslant \delta^{\lfloor m/r \rfloor}\, c\,\delta \leqslant \delta^{m/r-1}\, c\,\delta = c\,\gamma^m.$$

Теорема доказана. □

6°. Покажем, что из теорем 2 и 3 следует сходимость схемы subdivision q-го порядка, описанной в [2]. Действительно, маска subdivision определяется производящей функцией

$$s(z) = \frac{(1+z)^{q+1}}{2^q}.$$

Необходимое условие сходимости (8) выполнено. Имеем

$$d(z) = \frac{(1+z)^q}{2^q}.$$

Полагая $r = 1$ в теореме 3, получаем $\tilde{d}(z) = d(z)$, так что

$$\sum_l |\tilde{d}_{2l}| = \sum_{l=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{C_q^{2l}}{2^l} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_l |\tilde{d}_{2l+1}| = \sum_{l=0}^{\lfloor (q-1)/2 \rfloor} \frac{C_q^{2l+1}}{2^l} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $\delta = \frac{1}{2}$ верно неравенство (9). Применяя теоремы 3 и 2 заключаем, что схема subdivision сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson L. E., Stewart N. F. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces.* SIAM, 2010.

2. Чашников Н. В. *Построение кривых методом subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1001`).