# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СХЕМЫ SUBDIVISION*

Н. В. Чашников

nikolay.chashnikov@gmail.com

11 февраля 2012 г.

Данный доклад основан на статье [1] и является продолжением доклада [2]. Описана связь схемы subdivision с масштабирующим уравнением. Приведены достаточные условия гладкости предельной функции процесса subdivision.

**1°**. Напомним основные обозначения и результаты из [2].

Пусть задана маска subdivision $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Процесс subdivision заключается в построении последовательностей векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, определяемых рекуррентным соотношением

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_{l-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Обозначим через $s(z)$ производящую функцию последовательности $\{s_k\}$, а через $\mathbf{p}^m(z)$ — производящие функции последовательностей $\{\mathbf{p}_k^m\}$ при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Равенство (1) можно переписать с использованием производящих функций:

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\, \mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

При каждом $m$ с помощью последовательности векторов $\{\mathbf{p}_k^m\}$ строится кусочно-линейная вектор-функция

$$\mathbf{P}^m(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\widehat{N}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Если схема subdivision сходится, то последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ равномерно сходится к вектор-функции, обозначаемой $\mathbf{P}(t)$. Схема subdivision называется вырожденной, если для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ последовательность вектор-функций $\mathbf{P}^m(t)$ сходится к вектор-функции, тождественно равной нулю.

Согласно теореме 1 из [2], необходимым условием сходимости невырожденной схемы subdivision является выполнение равенств

$$\sum_k s_{2k} = \sum_k s_{2k+1} = 1. \tag{3}$$

Равенства (3) могут быть записаны в эквивалентной форме при помощи производящей функции $s(z)$:

$$s(1) = 2, \quad s(-1) = 0. \tag{4}$$

**2**°. В докладе [3] схема subdivision строилась на основании масштабирующего уравнения для B-сплайнов. Оказывается, аналогичное уравнение связано и со схемой subdivision общего вида.

**ЛЕММА 1.** *Пусть схема subdivision с маской* $\{s_k\}$ *сходится и удовлетворяет условиям* (4). *Тогда при любом начальном наборе контрольных точек для предельной вектор-функции справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t)\, dt = \sum_k \mathbf{p}_k^0. \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. При любом натуральном $m$ в силу условия (4) имеем

$$\mathbf{p}^m(1) = s(1)\, \mathbf{p}^{m-1}(1) = 2\, \mathbf{p}^{m-1}(1) = \cdots = 2^m\, \mathbf{p}^0(1).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^m(t)\, dt = \sum_k \mathbf{p}_k^m \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{N}(2^m\, t - k)\, dt =$$

$$= \sum_k \mathbf{p}_k^m\, 2^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{N}(\tau - k)\, d\tau = 2^{-m}\, \mathbf{p}^m(1) = \mathbf{p}^0(1).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t)\, dt = \mathbf{p}^0(1) = \sum_k \mathbf{p}_k^0,$$

что и требовалось. $\square$

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится и невырождена. Тогда существует единственная функция $\varphi \in C(\mathbb{R})$, обладающая следующими свойствами:*

*1)* $\operatorname{supp}\varphi$ *— компактное множество;*

*2) справедливо масштабирующее уравнение*

$$\varphi(t) = \sum_k s_k\, \varphi(2t-k), \qquad t \in \mathbb{R}; \tag{6}$$

*3) выполняется тождество*

$$\sum_k \varphi(t-k) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

*Кроме того, для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ предельная функция процесса subdivision выражается формулой*

$$\mathbf{P}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\, \varphi(t-k). \tag{8}$$

Доказательство. Определим начальный набор контрольных точек в пространстве $\mathbb{R}$:

$$f_k^0 = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через $\{f_k^m\}$ обозначим последовательность контрольных точек на шаге $m$ процесса subdivision, а через $f^m(z)$ — соответствующую производящую функцию. Введём кусочно-линейные функции

$$F^m(t) = \sum_k f_k^m\, \widehat{N}(2^m t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как схема subdivision сходится, существует предел функций $F^m$ при неограниченном увеличении $m$. Предельную функцию и возьмём в качестве функции $\varphi(t)$.

Проверим справедливость равенства (8). Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Применяя рекуррентное соотношение (2), при натуральном $m$ получаем

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = s(z)s(z^2)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \cdots = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j})\mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Производящая функция $f^0(z)$ последовательности $\{f_k^0\}$ тождественно равна единице. Поэтому аналогичные рассуждения для функции $f^m(z)$ приводят к равенству

$$f^m(z) = \prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j}).$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\mathbf{p}^m(z) = f^m(z)\mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Перепишем данное тождество в терминах последовательностей:

$$\mathbf{p}_k^m = \sum_l f_{l-2^m l}^m \mathbf{p}_l^0.$$

Далее,

$$\mathbf{P}^m(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m \widehat{N}(2^m t - k) = \sum_k \sum_l f_{l-2^m l}^m \mathbf{p}_l^0 \widehat{N}(2^m t - k) =$$
$$= \sum_l \mathbf{p}_l^0 \sum_j f_j^m \widehat{N}(2^m t - 2^m l - j) = \sum_l \mathbf{p}_l^0 F^m(t-l).$$

При неограниченном увеличении $m$ в пределе получаем равенство (8).

Проверим, что $\varphi$ обладает свойствами 1–3. Свойство 1 непосредственно следует из леммы, доказанной в [2].

Определим начальный набор контрольных точек следующим образом:

$$\mathbf{p}_k^0 = f_k^1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В таком случае при $m \geqslant 0$ справедливо равенство $\mathbf{p}_k^m = f_k^{m+1}$. Для любого вещественного $t$ имеем

$$\mathbf{P}^m(2t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m \widehat{N}(2^{m+1} t - k) = \sum_k f_k^{m+1} \widehat{N}(2^{m+1} t - k) = F^{m+1}(t).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, устанавливаем справедливость тождества

$$\mathbf{P}(2t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу рекуррентного соотношения (2) выполнено равенство $f^1(z) = s(z)f^0(z^2) = s(z)$. Отсюда вытекает, что $f_k^1 = s_k$ при всех $k$. Поэтому из доказанного тождества (8) следует, что

$$\mathbf{P}(2t) = \sum_k s_k \, \varphi(2t-k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из последнего равенства и равенства (9) заключаем, что верно соотношение (6). Свойство 2 для функции $\varphi(t)$ подтверждено.

Положим

$$\psi(t) = \sum_k \varphi(t-k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Применяя равенства (3) и мастшабирующее уравнение (6), записываем

$$\psi(2t) = \sum_k \varphi(2t-k) = \sum_k \Bigl(\sum_j s_{k-2j}\Bigr)\varphi(2t-k) = \sum_j \sum_k s_{k-2j}\,\varphi(2t-k) =$$
$$= \sum_j \sum_l s_l\,\varphi(2t-2j-l) = \sum_j \varphi(t-j) = \psi(t).$$

Значит, при любом натуральном $m$ выполняется равенство $\psi(t) = \psi(2^{-m}t)$. В силу непрерывности функции $\psi$ имеем

$$\psi(t) = \lim_{m\to\infty} \psi(2^{-m}t) = \psi(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, функция $\psi$ постоянна. Используя лемму 1, получаем

$$\int_0^1 \psi(t)\,dt = \sum_k \int_0^1 \varphi(t-k)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = \sum_k f_k^0 = 1.$$

Следовательно, функция $\psi$ тождественно равна единице. Свойство 3 установлено.

Осталось доказать, что $\varphi$ — единственная функция, обладающая свойствами 1–3. Предположим, что функция $\widetilde{\varphi}$ также удовлетворяет этим условиям. Покажем при помощи метода математической индукции, что при всех $m \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\sum_k f_k^m\,\widetilde{\varphi}(2^m t - k) = \widetilde{\varphi}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

При $m = 0$ равенство (10) проверяется непосредственно. Сделаем индукционный переход от $m-1$ к $m$. Пользуясь рекуррентным соотношением (1) и мастшабирующим уравнением (6), записываем

$$\sum_k f_k^m\,\widetilde{\varphi}(2^m t - k) = \sum_k \sum_l s_{k-2l}\,f_l^{m-1}\,\widetilde{\varphi}(2^m t - k) =$$
$$= \sum_l f_l^{m-1} \sum_j s_j\,\widetilde{\varphi}(2^m t - 2l - j) = \sum_l f_l^{m-1}\widetilde{\varphi}(2^{m-1} t - l) = \widetilde{\varphi}(t).$$

Тождество (10) доказано.

При $m \geqslant 0$ в силу равенств (10) и (7) для функции $\widetilde{\varphi}$ имеем

$$|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| = \left|\sum_k f_k^m \,\widetilde{\varphi}(2^m t - k) - \sum_k \varphi(t)\,\widetilde{\varphi}(2^m t - k)\right| =$$

$$= \left|\sum_k \bigl(f_k^m - \varphi(t)\bigr)\widetilde{\varphi}(2^m t - k)\right| \leqslant \sum_k \bigl|f_k^m - \varphi(2^{-m} k)\bigr|\,\bigl|\widetilde{\varphi}(2^m t - k)\bigr| +$$

$$+ \sum_k \bigl|\varphi(2^{-m} k) - \varphi(t)\bigr|\,\bigl|\widetilde{\varphi}(2^m t - k)\bigr|.$$

Покажем, что обе суммы в последнем выражении стремятся к нулю при неограниченном увеличении $m$. Носитель $\widetilde{\varphi}$ компактен, поэтому существует положительное целое $L$ такое, что

$$\operatorname{supp}\widetilde{\varphi} \subset [-L, L].$$

В каждой из сумм не больше $2L+1$ ненулевых слагаемых. Так как функция $\varphi$ является пределом последовательности функций $F^m$, то величина

$$\bigl|f_k^m - \varphi(2^{-m} k)\bigr| = \bigl|F^m(2^{-m} k) - \varphi(2^{-m} k)\bigr|$$

стремится к нулю равномерно по $k$. Принимая во внимание ограниченность функции $\widetilde{\varphi}$ получаем, что первая сумма стремится к нулю.

Если $\widetilde{\varphi}(2^m t - k)$ отлично от нуля, то $|2^m t - k| \leqslant L$, так что справедливо неравенство $|t - 2^{-m} k| \leqslant 2^{-m} L$. В силу равномерной непрерывности функции $\varphi$ выражение

$$\bigl|\varphi(2^{-m} k) - \varphi(t)\bigr|$$

стремится к нулю равномерно по $k$. Пользуясь ограниченностью функции $\widetilde{\varphi}$, приходим к заключению, что и вторая сумма стремится к нулю при неограниченном возрастании $m$.

Итак, $|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| = 0$ при всех вещественных $t$. Следовательно, функция $\widetilde{\varphi}$ тождественно равна $\varphi$.

Теорема доказана. $\square$

**3**°. Перейдём к описанию достаточных условий гладкости предельной вектор-функции процесса subdivision.

**ЛЕММА 2.** *Пусть схема subdivision с маской* $\{s_k\}$ *сходится и невырождена. Определим последовательность* $\{s_k^1\}$ *формулой*

$$s_k^1 = \frac{s_k + s_{k-1}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

*Тогда схема subdivision с маской* $\{s_k^1\}$ *также сходится и невырождена.*

Доказательство. Производящая функция $s^1(z)$ последовательности $\{s_k^1\}$ имеет вид

$$s^1(z) = \tfrac{1+z}{2}\, s(z).$$

Для схемы subdivision с маской $\{s_k\}$ выполнены необходимые условия сходимости (4). В частности, $s(1) = 2$. Поэтому равенства (4) верны и для функции $s^1(z)$. Справедлива формула $s^1(z) = (1+z)d(z)$, где $d(z) = \frac{1}{2}s(z)$.

Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Положим $\mathbf{q}^0(z) = \Delta\mathbf{p}^0(z)$ и рассмотрим процесс subdivision с маской $\{s_k\}$ и начальным набором контрольных точек $\{\mathbf{q}_k^0\}$. Обозначим через $\{\mathbf{q}_k^m\}$ последовательность, получаемую на шаге $m$, через $\mathbf{Q}^m$ — соответствующую ей кусочно-линейную вектор-функцию. Так как схема с маской $\{s_k\}$ сходится, то последовательность вектор-функций $\mathbf{Q}^m$ имеет предел. Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\max_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{Q}^m(t)\|$ ограничена сверху некоторой константой $c > 0$. Имеем

$$\max_k \|\mathbf{q}_k^m\| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{Q}^m(t)\| \leqslant c. \tag{12}$$

Рассмотрим процесс subdivision с маской $\{s_k^1\}$ для начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Из доказательства теоремы 3 в [2] известно рекуррентное соотношение

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m \geqslant 1.$$

Применяя это соотношение $m$ раз, получаем

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = d(z)d(z^2)\Delta\mathbf{p}^{m-2}(z^2) = \cdots = \left(\prod_{j=0}^{m-1} d(z^{2^j})\right)\Delta\mathbf{p}^0(z^{2^m}).$$

Аналогично, применяя $m$ раз рекуррентное соотношение (2) для производящей функции $\mathbf{q}^m(z)$, запишем

$$\mathbf{q}^m(z) = s(z)\mathbf{q}^{m-1}(z^2) = s(z)s(z^2)\Delta\mathbf{q}^{m-2}(z^2) = \cdots = \left(\prod_{j=0}^{m-1} s(z^{2^j})\right)\mathbf{q}^0(z^{2^m}).$$

Вместе эти два тождества дают равенство

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = \left(\prod_{j=0}^{m-1} \tfrac{1}{2}s(z^{2^j})\right)\Delta\mathbf{p}^0(z^{2^m}) = 2^{-m}\mathbf{q}^m(z).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| = 2^{-m} \max_k \mathbf{q}_k^m \leqslant 2^{-m}, c.$$

Используя теорему 2 из [2] с $\gamma = \frac{1}{2}$ заключаем, что схема subdivision с маской $\{s_k^1\}$ сходится.

Осталось проверить невырожденность схемы subdivision с маской $\{s_k^1\}$. Возьмём любой начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ с ненулевой суммой. Производящая функция $s^1(z)$ удовлетворяет условию (4), поэтому по лемме 1 получаем, что предельная вектор-функция не может быть тождественно равна нулю.

Лемма доказана. $\square$

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть схема subdivision с маской $\{s_k\}$ сходится. Тогда для любого начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$ процесс subdivision с маской $\{s_k^1\}$, задаваемой формулой (11), сходится к вектор-функции $\mathbf{P}(t)$ класса $C^1(\mathbb{R})$. Кроме того, процесс subdivision с маской $\{s_k\}$ и начальным набором контрольных точек $\{\Delta\mathbf{p}_k^0\}$ сходится к вектор-функции $\mathbf{P}'(t)$.*

Доказательство. По теореме 1 для схемы с маской $\{s_k\}$ найдётся функция $\varphi(t)$, обладающая свойствами (6) и (7). Положим

$$\psi(t) = \int_0^1 \varphi(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Переписывая интеграл в виде

$$\int_{t-1}^t \varphi(\tau)\,d\tau$$

получаем, что

$$\psi'(t) = \varphi(t) - \varphi(t-1), \quad t \in \mathbb{R},$$

поэтому $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

В силу леммы 2 схема subdivision с маской $\{s_k^1\}$ сходится и невырождена. Покажем, что функция $\psi$ обладает свойствами 1–3 из формулировки теоремы 1 для схемы subdivision с маской $\{s_k^1\}$. Компактность носителя $\psi$ следует из аналогичного свойства функции $\varphi$. Проверим справедливость масштабирующего уравнения (6). Имеем

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_0^1 \varphi(t-\tau)\,d\tau = \int_0^1 \sum_k s_k\,\varphi(2t-2\tau-k)\,d\tau = \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_k \int_0^2 s_k\,\varphi(2t-\tau-k)\,d\tau = \tfrac{1}{2}\sum_k s_k \biggl(\int_0^1 \varphi(2t-\tau-k)\,d\tau + \\
&\qquad + \int_0^1 \varphi(2t-\tau-k-1)\,d\tau\biggr) = \tfrac{1}{2}\sum_k s_k\bigl(\psi(2t-k)+\psi(2t-k-1)\bigr) = \\
&= \sum_k \frac{s_k + s_{k-1}}{2}\,\psi(2t-k) = \sum_k s_k^1\,\psi(2t-k).
\end{aligned}$$

Свойство 2 для функции $\psi(t)$ установлено. Проверим свойство 3:

$$\sum_k \psi(t-k) = \sum_k \int_0^1 \varphi(t-k-\tau)\,d\tau = \int_0^1 \Bigl(\sum_k \varphi(t-\tau-k)\Bigr) d\tau = 1.$$

Итак, функция $\psi$ удовлетворяет условиям 1–3 из формулировки теоремы 1. Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Предельная вектор-функция $\mathbf{P}$ по теореме 1 может быть представлена в виде (8):

$$\mathbf{P}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\, \psi(t-k).$$

Следовательно, вектор-функция $\mathbf{P}$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(t) &= \sum_k \mathbf{p}_k^0\, \psi'(t-k) = \sum_k \mathbf{p}_k^0 \bigl(\varphi(t-k) - \varphi(t-k-1)\bigr) = \\ &= \sum_k (\mathbf{p}_k^0 - \mathbf{p}_{k-1}^0)\, \varphi(t-k) = \sum_k \Delta\mathbf{p}_k^0\, \varphi(t-k).\end{aligned}$$

Согласно теореме 1, последнее выражение совпадает с предельной вектор-функцией процесса subdivision с маской $\{s_k\}$ для начального набора контрольных точек $\{\Delta\mathbf{p}_k^0\}$.

Теорема доказана. $\square$

**4°**. Покажем, как метод subdivision используется для построения кривых. Пусть заданы маска $\{s_k\}$ и начальные точки $\mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_1^0, \ldots, \mathbf{p}_N^0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Положим $\mathbf{p}_k^0 = 0$ при остальных целых $k$. Проведём процесс subdivision для начального набора контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Кусочно-линейные вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$ определяют ломаные в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если процесс subdivision сходится, то ломаные стремятся к кривой, задаваемой предельной вектор-функцией $\mathbf{P}(t)$. В таком случае процесс subdivision можно рассматривать как процесс построения ломаных, являющихся приближениями предельной кривой. Меняя начальные контрольные точки $\{\mathbf{p}_k^0\}$, можно влиять на форму получаемых ломаных и предельной кривой.

Заметим, что все вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$ и вектор-функция $\mathbf{P}(t)$ равны нулю вне некоторого отрезка. Поэтому соответствующие ломаные и предельная кривая начинаются и заканчиваются в начале координат независимо от набора точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. С практической точки зрения имеет смысл рассматривать вектор-функции $\mathbf{P}^m(t)$ при таких $t$, для которых на значение вектор-функции не влияют искусственно добавленные в последовательность $\{\mathbf{p}_k^0\}$ нулевые члены. Покажем, как найти множества таких $t$.

Введём обозначения

$$a = \min\{k \mid s_k \neq 0\}, \qquad b = \max\{k \mid s_k \neq 0\}.$$

Рекуррентное соотношение (1) можно записать в виде

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_{\frac{l-b}{2} \leqslant k \leqslant \frac{l-a}{2}} s_{l-2k}\, \mathbf{p}_k^{m-1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

На первом шаге subdivision по формуле (13) строятся векторы $\mathbf{p}_l^1$. Найдём диапазон индексов $l$, для которых в правой части формулы (13) не участвуют искусственно введённые нулевые члены из набора $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Обозначим этот диапазон через $a_1 : b_1$. Аналогично, на втором шаге вычислим диапазон индексов $l$, для которых в правой части формулы (13) участвуют только индексы $k$ из множества $a_1 : b_1$. Продолжая этот процесс, обозначим через $a_m : b_m$ диапазон индексов, получаемый на шаге $m$. Числа $a_m$, $b_m$ определяются из равенства

$$a_m : b_m = \big\{ l \in \mathbb{Z} \ \big| \ [\tfrac{l-b}{2}, \tfrac{l-a}{2}] \subset [a_{m-1}, b_{m-1}] \big\}.$$

Приходим к рекуррентному соотношению

$$a_m = 2\, a_{m-1} + b, \quad b_m = 2\, b_{m-1} + a, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

с начальными условиями $a_0 = 0$, $b_0 = N$. При всех натуральных $m$ имеем

$$\begin{aligned} 2^{-m} a_m &= 2^{-(m-1)} a_{m-1} + 2^{-m} b = 2^{-(m-2)} a_{m-2} + 2^{-(m-1)} b + 2^{-m} b = \cdots = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} b = (1 - 2^{-m}) b. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 2^{-m} b_m &= 2^{-(m-1)} b_{m-1} + 2^{-m} a = 2^{-(m-2)} b_{m-2} + 2^{-(m-1)} a + 2^{-m} a = \cdots = \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} a = N + (1 - 2^{-m}) a. \end{aligned}$$

Итак, при построении ломаной, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{P}^m(t)$, значения $t$ берутся из отрезка

$$[2^{-m} a_m,\, 2^{-m} b_m] = \big[(1 - 2^{-m}) b,\, N + (1 - 2^{-m}) a\big].$$

Устремляя $m$ к бесконечности получаем, что предельная кривая определяется вектор-функцией $\mathbf{P}(t)$ при $t \in [b, N + a]$.

**5°**. Предположим, что маска subdivision $\{s_k\}$ удовлетворяет условию

$$s_{2k} = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Зафиксируем начальный набор контрольных точек $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Для всех натуральных $m$ и целых $k$ имеем

$$\mathbf{p}_{2k}^m = \sum_l s_{2k-2l}\mathbf{p}_l^{m-1} = \mathbf{p}_k^{m-1}.$$

Последовательно применяя данное равенство, запишем

$$\mathbf{p}_{2^m k}^m = \mathbf{p}_{2^{m-1}k}^{m-1} = \cdots = \mathbf{p}_k^0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}^m(k) = \mathbf{p}_{2^m k}^m = \mathbf{p}_k^0. \tag{15}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим равенство

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{p}_k^0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Обратимся к геометрической интерпретации процесса subdivision. Если маска subdivision удовлетворяет условию (14), то равенства (15) и (16) означают, что как построенные на каждом шаге ломаная, так и предельная кривая проходят через начальные контрольные точки. Такие схемы subdivision называют *интерполяционными*.

**6°**. Пусть маска subdivision задаётся производящей функцией

$$s(z) = \tfrac{1}{16}(-z^{-3} + 9z^{-1} + 16 + 9z - z^3).$$

Покажем, что для любого начального набора контрольных точек процесс subdivision сходится к вектор-функции класса $C^1$. Функцию $s(z)$ можно записать в виде $s(z) = \frac{1+z}{2}s^0(z)$, где

$$s^0(z) = \tfrac{1}{8}(-z^{-3} + z^{-2} + 8z^{-1} + 8 + z - z^2).$$

Функция $s^0(z)$, в свою очередь, представляется в виде $s^0(z) = (1+z)d(z)$, где

$$d(z) = \tfrac{1}{8}(-z^{-3} + 2z^{-2} + 6z^{-1} + 2 - z).$$

Воспользуемся теоремой 3 из [2] для схемы с маской $s^0(z)$. Если взять $r = 1$, то получим

$$\delta = \max_k \sum_l |d_{k-2l}| = \max\{1, \tfrac{1}{2}\} = 1,$$

и условие теоремы не выполнено. При $r = 2$ имеем

$$\tilde{d}(z) = d(z)d(z^2) = \tfrac{1}{64}(z^{-9} - 2z^{-8} - 8z^{-7} + 2z^{-6} + 7z^{-5} + 16z^{-4} + 32z^{-3} + \\ + 16z^{-2} + 7z^{-1} + 2 - 8z - 2z^2 + z^3).$$

В этом случае

$$\delta = \max_k \sum_l |\tilde{d}_{k-4l}| = \max\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{16}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{16}\} = \tfrac{3}{4}.$$

Условие теоремы 3 из [2] выполнено. Следовательно, схема subdivision с маской $s^0(z)$ сходится. По теореме 2 исходный процесс subdivision с маской $\{s_k\}$ для любого начального набора контрольных точек сходится к вектор-функции класса $C^1$.

Последовательность коэффициентов функции $s(z)$ удовлетворяет условию (14), поэтому схема subdivision является интерполяционной. Она называется *четырёхточеченой интерполяционной схемой* [4].

**ПРИМЕР.** Приведём пример построения ломаных при помощи четырёхточечной интерполяционной схемы subdivision. На рис. 1 изображена ломаная с вершинами в начальных контрольных точках $\{\mathbf{p}_k^0\}$. На рис. 2 показан переход от ломаной $\{\mathbf{p}_k^0\}$ к $\{\mathbf{p}_k^1\}$, на рис. 3 — от $\{\mathbf{p}_k^1\}$ к $\{\mathbf{p}_k^2\}$. При этом исходная ломаная изображена штриховой линией, а преобразованная ломаная — сплошной линией и её вершины отмечены кружками. На рис. 4 представлена ломаная, задаваемая последовательностью $\{\mathbf{p}_k^3\}$, и начальные контрольные точки.

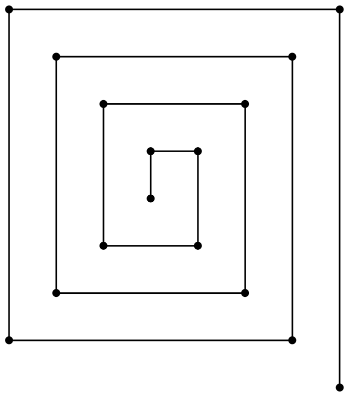

Рис. 1. $\{\mathbf{p}_k^0\}$

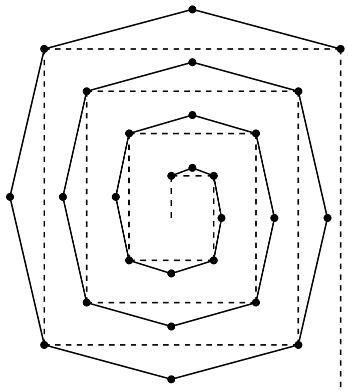

Рис. 2. $\{\mathbf{p}_k^1\}$

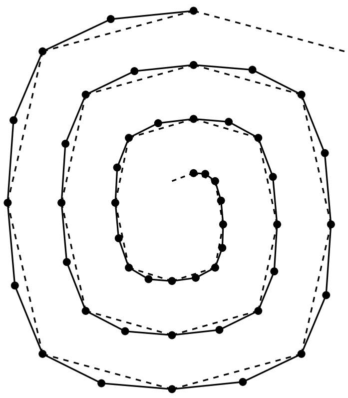

Рис. 3. $\{\mathbf{p}_k^2\}$

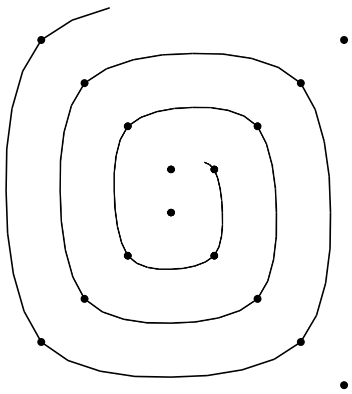

Рис. 4. $\{\mathbf{p}_k^3\}$

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Dyn N. *Subdivision schemes in CAGD* // Advances in Numerical Analysis II: Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Functions. 1991. P. 36–104.

2. Чашников Н. В. *Сходимость схемы subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 3 декабря 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1303`).

3. Чашников Н. В. *Построение кривых методом subdivision* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 октября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1001`).

4. Dyn N., Levin D., Gregory J. *A 4-point interpolatory scheme for curve design* // Computer Aided Geometric Design. 1987. Vol 4. P. 257–268.