ПОВЕРХНОСТИ КУНСА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ*

В. Н. Малозёмов А. Н. Сергеев Н. В. Чашников

malv@math.spbu.ru aser57@mail.ru nik239@list.ru

7 апреля 2007 г.

1°. Пусть $\Delta = \big\{(u,v,w) \mid u+v+w=1,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0\big\}$. Ставится задача: *построить по вектор-функциям g_1, g_2, $g_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ возможно более простую вектор-функцию $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям*

$$s(u,0,1-u) \equiv g_1(u), \quad s(1-v,v,0) \equiv g_2(v), \quad s(0,1-w,w) \equiv g_3(w). \tag{1}$$

Последовательно подставляя в тождества (1) вместо u, v и w значения 0 и 1, получаем необходимые *условия согласования* на вектор-функции g_1, g_2 и g_3:

$$\begin{aligned} g_1(0) &= s(0,0,1) = g_3(1),\\ g_2(0) &= s(1,0,0) = g_1(1),\\ g_3(0) &= s(0,1,0) = g_2(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Будем считать, что условия (2) выполнены.

Дадим геометрическую интерпретацию этой задачи. Обозначим

$$A = g_1(1) = g_2(0), \quad B = g_2(1) = g_3(0), \quad C = g_3(1) = g_1(0).$$

Вектор-функция $g_1(u)$ при $u \in [0,1]$ задаёт кривую, соединяющую точки C и A. Аналогично вектор-функции g_2, g_3 задают кривые, соединяющие пары точек A и B, B и C соответственно. Элементы множества Δ можно рассматривать как барицентрические координаты точки на треугольнике. Тогда вектор-функция $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$ задаёт параметрическую поверхность с треугольной областью определения, а условия (1) означают, что кривые g_1, g_2 и g_3 являются граничными для этой поверхности.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Пусть $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям $H(0) = 0$, $H(1) = 1$. Положим

$$\begin{aligned} s(u,v,w) = H(1-v)\, g_1\Big(\frac{u}{1-v}\Big) + H(1-w)\, g_2\Big(\frac{v}{1-w}\Big) + \\ + H(1-u)\, g_3\Big(\frac{w}{1-u}\Big) - H(u)A - H(v)B - H(w)\, C. \end{aligned} \tag{3}$$

Формально вектор-функция s не определена, если один из аргументов равен единице. Но если $v = 1$, то $H(1-v) = 0$, поэтому будем считать, что первое слагаемое в (3) равно нулю. Аналогично поступим в случаях $u = 1$ и $w = 1$. Таким образом, можно считать, что вектор-функция $s(u,v,w)$ определена на всём множестве Δ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Вектор-функция $s(u,v,w)$ вида* (3) *удовлетворяет условиям* (1).

Доказательство. Проверим, что выполняется первое равенство в (1). Имеем

$$\begin{aligned} s(u,0,1-u) = H(1)\, g_1(u) + H(u)\, g_2(0) + H(1-u)\, g_3(1) - \\ - H(u)A - H(0)B - H(1-u)\, C = g_1(u). \end{aligned}$$

Аналогично проверяются второе и третье равенства в (1). □

3°. Поверхность, определяемая вектор-функцией (3), называется *поверхностью Кунса "сторона-вершина" на треугольнике.* Чтобы пояснить смысл этого названия, обратимся к геометрической интерпретации формулы (3), в случае $H(t) = t$. Перепишем её в виде

$$s(u,v,w) = s_1(u,v,w) + s_2(u,v,w) + s_3(u,v,w) - 2s_4(u,v,w),$$

где

$$\begin{aligned} s_1(u,v,w) &= (1-v)\, g_1\Big(\frac{u}{1-v}\Big) + vB, \\ s_2(u,v,w) &= (1-w)\, g_2\Big(\frac{v}{1-w}\Big) + wC, \\ s_3(u,v,w) &= (1-u)\, g_3\Big(\frac{w}{1-u}\Big) + uA, \\ s_4(u,v,w) &= uA + vB + wC. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Тогда точку $p = (u,v,w) \in \Delta$ можно представить в виде $p = ue_1 + ve_2 + we_3$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $p_0 = u_0\, e_1 + (1-u_0)e_3$, *где* $u_0 \in [0,1]$. *Для того чтобы точка* $p = (u,v,w) \in \Delta$ *принадлежала отрезку* $[p_0, e_2]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$u = u_0(1-v), \quad v \in [0,1]. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $p \in [p_0, e_2]$. При некотором $t \in [0,1]$ справедливо равенство

$$p = te_2 + (1-t)\big[u_0\, e_1 + (1-u_0)e_3\big] = (1-t)u_0\, e_1 + te_2 + (1-t)(1-u_0)e_3.$$

В частности, $u = (1-t)u_0$, $v = t$, что равносильно (4).
Достаточность. Пусть для точки $p \in \Delta$ выполняется условие (4). Тогда

$$w = 1 - v - u = 1 - v - u_0(1-v) = (1-v)(1-u_0)$$

и

$$p = u_0(1-v)e_1 + ve_2 + (1-u_0)(1-v)e_3 =$$
$$= (1-v)\big[u_0\, e_1 + (1-u_0)e_3\big] + ve_2 = (1-v)p_0 + ve_2.$$

Значит, $p \in [p_0, e_2]$. Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство множеств*

$$\big\{s_1(p) \mid p \in [p_0, e_2]\big\} = [g_1(u_0), B]. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим множества, стоящие в левой и правой частях равенства (5), через Q и T соответственно. Нужно показать, что $Q = T$.

Пусть $q \in Q$, то есть $q = s_1(p)$, где $p = (u,v,w) \in [p_0, e_2]$. Если $v = 1$, то $p = (0,1,0)$ и $q = s_1(0,1,0) = B \in T$. Если же $v < 1$, то по предыдущей лемме $\frac{u}{1-v} = u_0$, поэтому $q = (1-v)g_1(u_0) + vB \in T$. В обоих случаях из того, что $q \in Q$, следует, что $q \in T$. Значит, $Q \subset T$.

Наоборот, пусть $r \in T$, то есть $r = (1-t)g_1(u_0) + tB$ при некотором $t \in [0,1]$. Положим $p = \big(u_0(1-t), t, (1-u_0)(1-t)\big)$. Ясно, что $p \in \Delta$. Из леммы 1 следует, что $p \in [p_0, e_2]$. Если $t < 1$, то $s_1(p) = (1-t)g_1(u_0) + tB = r$. Если же $t = 1$, то $r = B$ и $s_1(p) = s_1(0,1,0) = B = r$. В обоих случаях $s_1(p) = r$, так что $r \in Q$. Доказано обратное включение $T \subset Q$, а с ним и равенство $T = Q$. □

Лемма 2 показывает, что поверхность, определяемая вектор-функцией s_1, состоит из отрезков вида $[g_1(u_0), B]$ при $u_0 \in [0,1]$. Иными словами, вектор-функция s_1 задаёт линейчатую поверхность, образованную отрезками, соединяющими точки кривой g_1 с точкой B. На рис. 1 приведён пример граничных кривых, а на рис. 2 изображена поверхность s_1, построенная для этих кривых. Аналогичным образом вектор-функция s_2 задаёт линейчатую поверхность, образованную отрезками, соединяющими точки кривой g_2 с точкой C (см. рис. 3), а s_3 — линейчатую поверхность, образованную отрезками, соединяющими точки кривой g_3 с точкой A (см. рис. 4). Поверхность, задаваемая вектор-функцией s_4 представляет собой участок плоскости, ограниченный треугольником с вершинами A, B и C (см. рис. 5). Поверхность Кунса приведена на рис. 6.

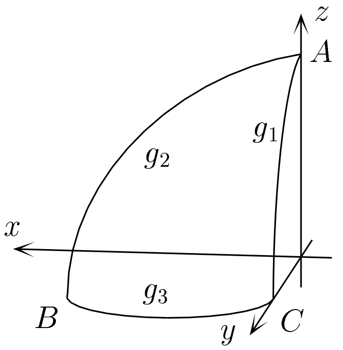

Рис. 1. Кривые g_1, g_2, g_3

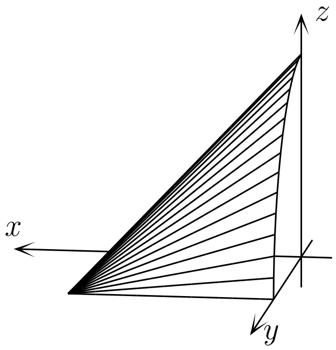

Рис. 2. Поверхность $s_1(u, v, w)$

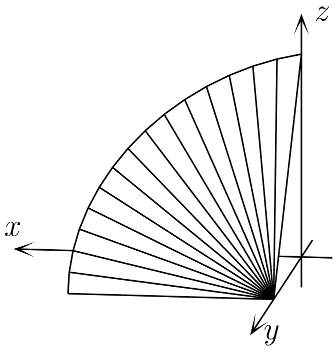

Рис. 3. Поверхность $s_2(u, v, w)$

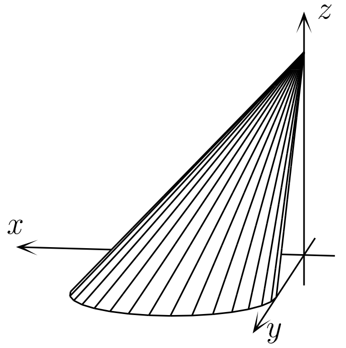

Рис. 4. Поверхность $s_3(u, v, w)$

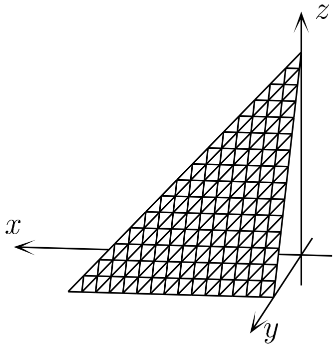

Рис. 5. Поверхность $s_4(u, v, w)$

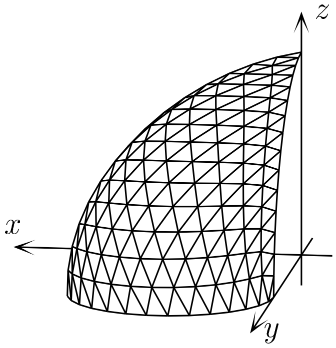

Рис. 6. Поверхность Кунса

4°. Рассмотрим случай, когда граничные кривые g_1, g_2 и g_3 являются кривыми Безье второго порядка. Пусть точки C, P_{10}, A — полюсы g_1, точки A, P_{11}, B — полюсы g_2, точки B, P_{01}, C — полюсы g_3. Положим $P_{00} = C$, $P_{20} = A$,

$P_{02} = B$. Тогда для кривых Безье g_1, g_2 и g_3 справедливы представления

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \sum_{i=0}^{2} P_{i0}\, C_2^i\, u^i (1-u)^{2-i}, \\ g_2(v) &= \sum_{k=0}^{2} P_{2-k,k}\, C_2^k\, v^k (1-v)^{2-k}, \\ g_3(w) &= \sum_{j=0}^{2} P_{0,2-j}\, C_2^j\, w^j (1-w)^{2-j}. \end{aligned} \tag{6}$$

По шести полюсам P_{ij} можно построить поверхность Безье на треугольнике (см. [1]):

$$b(u,v) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2-i} P_{ij}\, \frac{2!}{i!\, j!\, (2-i-j)!}\, u^i\, v^j\, (1-u-v)^{2-i-j}, \tag{7}$$

$$u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad u+v \leqslant 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Поверхность Кунса, построенная по формуле* (3) *для граничных кривых* (6) *с* $H(t) = t^2$, *совпадает с поверхностью Безье* (7), *точнее*

$$s(u, v, 1-u-v) = b(u,v) \quad \textit{при} \quad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u+v \leqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем первое слагаемое в (3):

$$H(1-v)\, g_1\Big(\frac{u}{1-v}\Big) = (1-v)^2 \sum_{i=0}^{2} P_{i0}\, C_2^i \Big(\frac{u}{1-v}\Big)^i \Big(\frac{1-v-u}{1-v}\Big)^{2-i} = \\ = \sum_{i=0}^{2} P_{i0}\, C_2^i\, u^i\, w^{2-i}.$$

Аналогично для второго и третьего слагаемых в (3) имеем

$$H(1-w)\, g_2\Big(\frac{v}{1-w}\Big) = \sum_{k=0}^{2} P_{2-k,k}\, C_2^k\, v^k\, u^{2-k},$$

$$H(1-u)\, g_3\Big(\frac{w}{1-u}\Big) = \sum_{j=0}^{2} P_{0,2-j}\, C_2^j\, w^j\, v^{2-j}.$$

Подставим полученные выражения в (3). Придём к формуле

$$\begin{aligned} s(u,v,w) &= \big(w^2 P_{00} + 2uwP_{10} + u^2 P_{20}\big) + \big(u^2 P_{20} + 2vuP_{11} + v^2 P_{02}\big) + \\ &+ \big(v^2 P_{02} + 2wvP_{01} + w^2 P_{00}\big) - \big(u^2 A + v^2 B + w^2 C\big) = \\ &= w^2 P_{00} + v^2 P_{02} + u^2 P_{20} + 2uwP_{10} + 2vuP_{11} + 2wvP_{01}. \end{aligned}$$

Если в последнем выражении заменить w на $1 - u - v$, то получится правая часть формулы (7). Следовательно, $s(u, v, 1-u-v) = b(u, v)$, что и требовалось доказать. □

На рис. 7 приведены полюсы и построенные по ним кривые Безье, а на рис. 8 изображена поверхность Кунса для этих граничных кривых. Она совпадает с соответствующей поверхностью Безье.

Дальнейшую информацию о поверхностях Кунса на треугольнике можно найти в книге [2] и приведённом там списке литературы.

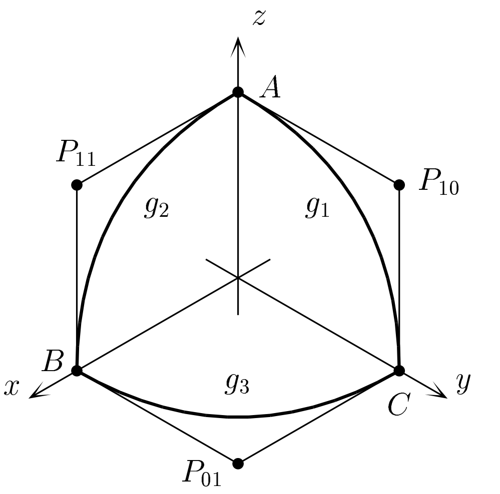

Рис. 7. Граничные кривые

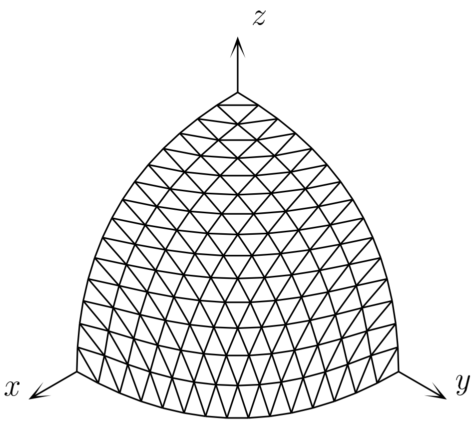

Рис. 8. Поверхность Кунса-Безье

ЛИТЕРАТУРА

1. Капелюхин И. А., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Поверхности Безье на треугольнике. Перепараметризация* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 10 марта 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0310`)

2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD.* 5th ed. Academic Press, 2002.