ПОВЕРХНОСТИ КУНСА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

4 октября 2008 г.

1°. Пусть $\Delta = \big\{(u,v,w) \mid u+v+w=1,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0\big\}$. Определим операторы D_1, D_2 и D_3 для вектор-функций $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
D_1 s(u,v,w) &= \lim_{t\to 0} \frac{s(u,v-t,w+t)-s(u,v,w)}{t} \quad \text{при } u<1,\\
D_2 s(u,v,w) &= \lim_{t\to 0} \frac{s(u+t,v,w-t)-s(u,v,w)}{t} \quad \text{при } v<1,\\
D_3 s(u,v,w) &= \lim_{t\to 0} \frac{s(u-t,v+t,w)-s(u,v,w)}{t} \quad \text{при } w<1,\\
D_1 s(1,0,0) &= -D_2 s(1,0,0) - D_3 s(1,0,0),\\
D_2 s(0,1,0) &= -D_1 s(0,1,0) - D_3 s(0,1,0),\\
D_3 s(0,0,1) &= -D_1 s(0,0,1) - D_2 s(0,0,1).
\end{aligned} \tag{1}$$

Если $(u,v,w) \in \partial\Delta$, то значение $D_i s(u,v,w)$ будем вычислять как соответствующий односторонний предел. Например, если $v=0$, $w>0$, то в выражении для $D_1 s(u,v,w)$ предел будем считать левосторонним, а если $w=0$, $v>0$, то правосторонним.

Заметим, что если найдётся вектор-функция $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, такая, что $r \in C^1(\Omega)$ и $s = r|_\Delta$, то

$$D_1 s = s_w - s_v, \qquad D_2 s = s_u - s_w, \qquad D_3 s = s_v - s_u. \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Ясно, что в этом случае $D_1 s + D_2 s + D_3 s \equiv 0$. Покажем, что это тождество справедливо и в общем случае.

ЛЕММА. *Если вектор-функции s, $D_1 s$, $D_3 s$ непрерывны на Δ, то вектор-функция $D_2 s$ определена и непрерывна на Δ и выполнено тождество $D_1 s + D_2 s + D_3 s = 0$.*

Доказательство. Для угловых точек множества Δ утверждение справедливо по определению. Поэтому будем считать, что $u, v, w < 1$.

Положим $r(u, w) = s(u, 1 - u - w, w)$ для $u, w \in [0, 1]$, $u + w \leqslant 1$. По определению (1) имеем

$$r_u(u, w) = -D_3 s(u, 1 - u - w, w), \qquad r_w(u, w) = D_1 s(u, 1 - u - w, w).$$

Так как $D_1 s, D_3 s \in C(\Delta)$, то $r \in C^1$. Следовательно, производная от r по направлению равна скалярному произведению вектора направления на градиент. Значит,

$$D_2 s(u, 1 - u - w, w) = \lim_{t \to 0} \frac{r(u + t, w - t) - r(u, w)}{t} = r_u(u, v) - r_w(u, v).$$

Таким образом, вектор-функция $D_2 s$ определена и непрерывна на Δ и

$$D_1 s(u, 1 - u - w, w) + D_2 s(u, 1 - u - w, w) + D_3 s(u, 1 - u - w, w) \equiv 0,$$

что и требовалось. $\square$

2°. Поставим задачу: *построить по непрерывно дифференцируемым вектор-функциям g_1, g_2, $g_3 \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ и непрерывным вектор-функциям f_1, f_2, $f_3 \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ возможно более простую вектор-функцию $s \colon \Delta \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям*

$$s,\ D_1 s,\ D_2 s,\ D_3 s \in C(\Delta);$$

$$s(u, 0, 1 - u) \equiv g_1(u), \qquad s(1 - v, v, 0) \equiv g_2(v), \qquad s(0, 1 - w, w) \equiv g_3(w); \quad (3)$$

$$D_1 s(u, 0, 1 - u) \equiv f_1(u),\ D_2 s(1 - v, v, 0) \equiv f_2(v),\ D_3 s(0, 1 - w, w) \equiv f_3(w). \quad (4)$$

Как видно, на границе множества Δ заданы значения вектор-функции s и на каждой стороне заданы значения одного из операторов D_i. Покажем, что из этих условий можно вывести значения всех операторов D_i на границе.

Продифференцируем тождества (3). Получим

$$D_2 s(u, 0, 1 - u) \equiv g_1'(u), \quad D_3 s(1 - v, v, 0) \equiv g_2'(v), \quad D_1 s(0, 1 - w, w) \equiv g_3'(w). \quad (5)$$

Положим $h_i(t) = -f_i(t) - g_i'(t)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда из леммы и тождеств (4) и (5) следует, что

$$D_3 s(u, 0, 1-u) \equiv h_1(u),\ D_1 s(1-v, v, 0) \equiv h_2(v),\ D_2 s(0, 1-w, w) \equiv h_3(w). \quad (6)$$

Выясним необходимые условия согласования на функции g_i и f_i. Последовательно подставляя в тождества (3) вместо u, v и w значения 0 и 1, получаем

$$\begin{aligned} g_1(1) &= s(1,0,0) = g_2(0), \\ g_2(1) &= s(0,1,0) = g_3(0), \\ g_3(1) &= s(0,0,1) = g_1(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, последовательно подставляя в тождества (4), (5) и (6) вместо u, v и w значения 0 и 1, придём к равенствам

$$g_1'(1) = f_2(0), \quad g_2'(1) = f_3(0), \quad g_3'(1) = f_1(0), \quad (8)$$
$$g_1'(0) = h_3(1), \quad g_2'(0) = h_1(1), \quad g_3'(0) = h_2(1). \quad (9)$$

Условия (9) можно переписать без использования функций h_i:

$$g_1'(0) = -f_3(1) - f_1(0), \quad g_2'(0) = -f_1(1) - f_2(0), \quad g_3'(0) = -f_2(1) - f_3(0). \quad (10)$$

3°. Будем искать вектор-функцию c_1, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} c_1(u, 0, 1-u) &= g_1(u), \quad D_1 c_1(u, 0, 1-u) = f_1(u), \quad u \in [0,1], \\ c_1(1-v, v, 0) &= g_2(v), \quad D_1 c_1(1-v, v, 0) = h_2(v), \quad v \in [0,1]. \end{aligned} \quad (11)$$

Зафиксируем $u_0 \in [0, 1)$ и положим $p(t) = c_1\big(u_0, (1-t)(1-u_0), t(1-u_0)\big)$. Тогда

$$\begin{aligned} p(0) &= c_1(u_0, 1-u_0, 0), \qquad p'(0) = (1-u_0) D_1 c_1(u_0, 1-u_0, 0), \\ p(1) &= c_1(u_0, 0, 1-u_0), \qquad p'(1) = (1-u_0) D_1 c_1(u_0, 0, 1-u_0). \end{aligned}$$

Таким образом, тождества (11) эквивалентны условиям на вектор-функцию $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(0) &= g_2(1-u_0), \qquad p'(0) = (1-u_0) h_2(1-u_0), \\ p(1) &= g_1(u_0), \qquad p'(1) = (1-u_0) f_1(u_0). \end{aligned}$$

Возьмём в качестве $p(t)$ интерполяционный полином Эрмита

$$p(t) = H_1(t) g_2(1-u_0) + (1-u_0) H_2(t) h_2(1-u_0) + (1-u_0) H_3(t) f_1(u_0) + H_4(t) g_1(u_0),$$

где H_1, H_2, H_3, H_4 — кубические полиномы Эрмита

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, \\ H_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \\ H_3(x) &= x^3 - x^2, \\ H_4(x) &= -2x^3 + 3x^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, для $u_0 < 1$ вектор-функция $c_1(u_0, v, w) = p(\frac{w}{1-u_0})$ удовлетворяет условиям (11). Для случая $u_0 = 1$ положим $c_1(1,0,0) = g_1(1)$. Имеем

$$c_1(u,v,w) = \begin{cases} H_1\left(\frac{w}{1-u}\right)g_2(1-u) + (1-u)H_2\left(\frac{w}{1-u}\right)h_2(1-u) + \\ \quad +(1-u)H_3\left(\frac{w}{1-u}\right)f_1(u) + H_4\left(\frac{w}{1-u}\right)g_1(u), & \text{при } u < 1, \\ g_1(1), & \text{при } u = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Дифференцируя первое и третье тождество в (11) и используя лемму получим, что $c_1(u,v,w)$ удовлетворяет и остальным условиям на сторонах $v = 0$ и $w = 0$:

$$\begin{aligned} D_2c_1(u,0,1-u) &= g_1'(u), \quad D_3c_1(u,0,1-u) = h_1(u), \\ D_3c_1(1-v,v,0) &= g_2'(v), \quad D_2c_1(1-v,v,0) = f_2(v). \end{aligned} \tag{14}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если для вектор-функций g_i, f_i, h_i выполнены условия (7), (8) и (9), то построенная по формуле (13) вектор-функция c_1, а также вектор-функции D_1c_1, D_2c_1 и D_3c_1 будут непрерывны на Δ.*

Доказательство. Заметим, что если $(u,v,w) \in \Delta$ и $u < 1$, то

$$\frac{w}{1-u} = \frac{w}{v+w} \in [0,1].$$

Поэтому функции $H_i\left(\frac{w}{1-u}\right)$ и $H_i'\left(\frac{w}{1-u}\right)$ ограничены.

Кроме того, мы будем пользоваться тождествами

$$\begin{aligned} &H_1(t) + H_4(t) \equiv 1, \\ &H_2(t) + H_3(t) \equiv H_1(t) + t - 1, \\ &H_2'(t) + H_3'(t) \equiv H_1'(t) + 1, \end{aligned}$$

вытекающими из определений полиномов Эрмита (12).

Ясно, что непрерывность требуется проверить только в точке $(1,0,0)$. Для вектор-функции $c_1(u,v,w)$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} c_1(u,v,w) &= \lim H_1\left(\tfrac{w}{1-u}\right)g_2(1-u) + \Big(1 - H_1\left(\tfrac{w}{1-u}\right)\Big)g_1(u) + \\ &\quad + \lim(1-u)\Big(H_2\left(\tfrac{w}{1-u}\right)h_2(1-u) + H_3\left(\tfrac{w}{1-u}\right)f_1(u)\Big) = \\ &= g_1(1) + \lim H_1\left(\tfrac{w}{1-u}\right)\big(g_2(1-u) - g_1(u)\big) + \\ &\quad + \lim(1-u)\Big(H_2\left(\tfrac{w}{1-u}\right)h_2(1-u) + H_3\left(\tfrac{w}{1-u}\right)f_1(u)\Big). \end{aligned}$$

По условию согласования (7)

$$\lim_{u\to1} g_2(1-u) - g_1(u) = g_2(0) - g_1(1) = 0.$$

Значит, оба оставшихся предела равны нулю как пределы произведений ограниченных функций на функции, стремящиеся к нулю. Следовательно,

$$\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} c_1(u,v,w) = g_1(1) = c_1(1,0,0).$$

Проверим непрерывность вектор-функции $D_1c_1(u,v,w)$ в точке $(1,0,0)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} D_1c_1(u,v,w) &= \lim \frac{\partial c_1}{\partial w}(u,v,w) = \\
&= \lim \tfrac{1}{1-u} H_1'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) g_2(1-u) + H_2'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) h_2(1-u) + \\
&\quad + H_3'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) f_1(u) + \tfrac{1}{1-u} H_4'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) g_1(u) = \\
&= \lim \tfrac{1}{1-u} H_1'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) g_2(1-u) + H_2'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) h_2(0) + \\
&\quad + H_3'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) f_1(1) - \tfrac{1}{1-u} H_1'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) g_1(u) + \\
&\quad + \lim H_2'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)\bigl(h_2(1-u) - h_2(0)\bigr) + H_3'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)\bigl(f_1(u) - f_1(1)\bigr).
\end{aligned}$$

Функции $H_2'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)$ и $H_3'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)$ ограничены, поэтому второй предел в последнем выражении равен нулю. Из условий согласования (8) и (9) следует, что

$$f_1(1) = -g_1'(1) - h_1(1) = -f_2(0) - g_2'(0) = h_2(0).$$

Поэтому

$$\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} D_1c_1(u,v,w) = \lim H_1'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)\Bigl[\frac{g_2(1-u) - g_1(u)}{1-u}\Bigr] +$$

$$+ h_2(0)\Bigl[H_2'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr) + H_3'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)\Bigr] = h_2(0) + \lim H_1'\bigl(\tfrac{w}{1-u}\bigr)\Bigl[\frac{g_2(1-u) - g_1(u)}{1-u} + h_2(0)\Bigr].$$

По правилу Лопиталя получаем, что

$$\lim_{u\to1} \frac{g_2(1-u) - g_1(u)}{1-u} = g_1'(1) + g_2'(0) = f_2(0) + g_2'(0) = -h_2(0),$$

Следовательно, оставшийся предел равен нулю. Тогда

$$\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} D_1c_1(u,v,w) = h_2(0).$$

А по определению (1)

$$D_1c_1(1,0,0) = -D_2c_1(1,0,0) - D_3c_1(1,0,0) = -f_2(1) - g_1'(1) = h_2(0),$$

то есть вектор-функция D_1c_1 непрерывна в точке $(1,0,0)$.

Проверим непрерывность $D_3c_1(u,v,w)$ в точке $(1,0,0)$. Имеем

$$\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} D_3c_1(u,v,w) = \lim \frac{\partial c_1}{\partial u}(u,v,w) =$$
$$= \lim \tfrac{w}{(1-u)^2} H_1'\big(\tfrac{w}{1-u}\big) g_2(1-u) - H_1\big(\tfrac{w}{1-u}\big) g_2'(1-u) +$$
$$+ \Big[-H_2\big(\tfrac{w}{1-u}\big) + \tfrac{w}{1-u} H_2'\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\Big] h_2(1-u) - (1-u) H_2\big(\tfrac{w}{1-u}\big) h_2'(1-u) +$$
$$+ \Big[-H_3\big(\tfrac{w}{1-u}\big) + \tfrac{w}{1-u} H_3'\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\Big] f_1(u) + (1-u) H_3\big(\tfrac{w}{1-u}\big) f_1'(u) +$$
$$+ \tfrac{w}{(1-u)^2} H_4'\big(\tfrac{w}{1-u}\big) g_1(u) + H_4\big(\tfrac{w}{1-u}\big) g_1'(u).$$

Как и ранее, можно заменить $h_2(1-u)$ и $f_1(u)$ на их общее предельное значение $f_1(1)$. Получим

$$\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} D_3c_1(u,v,w) = \lim \tfrac{w}{(1-u)^2} H_1'\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\big(g_2(1-u) - g_1(u)\big) -$$
$$- H_1\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\big(g_1'(u) + g_2'(1-u)\big) + g_1'(u) - f_1(1)\Big(H_2\big(\tfrac{w}{1-u}\big) + H_3\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\Big) +$$
$$+ \tfrac{w}{1-u}\Big(H_2'\big(\tfrac{w}{1-u}\big) + H_3'\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\Big) f_1(1) = f_1(1) + g_1'(u) +$$
$$+ \lim \tfrac{w}{1-u} H_1'\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\Big[\frac{g_2(1-u) - g_1(u)}{1-u} + f_1(1)\Big] -$$
$$- \lim H_1\big(\tfrac{w}{1-u}\big)\big(g_1'(u) + g_2'(1-u) + f_1(1)\big).$$

Так как

$$\lim_{u\to 1} \frac{g_2(1-u) - g_1(u)}{1-u} = -h_2(0) = -f_1(1)$$

и

$$\lim_{u\to 1} g_1'(u) + g_2'(1-u) = g_1'(1) + g_2'(0) = g_1'(1) + h_1(1) = -f_1(1),$$

то

$$\lim_{(u,v,w)\to(1,0,0)} D_3c_1(u,v,w) = f_1(1) + g_1'(1) = -h_1(1) = -D_3c_1(1,0,0).$$

Итак, вектор-функции c_1, D_1c_1 и D_3c_1 непрерывны на Δ. Из леммы следует, что вектор-функция D_2c_1 также непрерывна на Δ. $\square$

Определим вектор-функции $c_2(u,v,w)$ и $c_3(u,v,w)$ аналогично c_1:

$$c_2(u,v,w) = \begin{cases} H_1\big(\tfrac{u}{1-v}\big) g_3(1-v) + (1-v) H_2\big(\tfrac{u}{1-v}\big) h_3(1-v) + \\ \qquad + (1-v) H_3\big(\tfrac{u}{1-v}\big) f_2(v) + H_4\big(\tfrac{u}{1-v}\big) g_2(v) & \text{при } v < 1, \\ g_2(1), & \text{при } v = 1; \end{cases}$$

$$c_3(u,v,w) = \begin{cases} H_1\big(\tfrac{v}{1-w}\big) g_1(1-w) + (1-w) H_2\big(\tfrac{v}{1-w}\big) h_1(1-w) + \\ \qquad + (1-w) H_3\big(\tfrac{v}{1-w}\big) f_3(w) + H_4\big(\tfrac{v}{1-w}\big) g_3(w) & \text{при } w < 1, \\ g_3(1), & \text{при } w = 1. \end{cases}$$

Вектор-функция $c_2(u,v,w)$ удовлетворяет граничным условиям на сторонах $u=0$ и $w=0$, а $c_3(u,v,w)$ — на сторонах $u=0$ и $v=0$.

4°. Положим

$$c(u,v,w)=\alpha(u,v,w)c_1(u,v,w)+\beta(u,v,w)c_2(u,v,w)+\gamma(u,v,w)c_3(u,v,w), \quad (15)$$

где α, β, $\gamma\colon \Delta\to\mathbb{R}^3$ — некоторые функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha(0,1-w,w)&\equiv 0, & D_i\alpha(0,1-w,w)&\equiv 0,\\ \beta(u,0,1-u)&\equiv 0, & D_i\beta(u,0,1-u)&\equiv 0,\\ \gamma(1-v,v,0)&\equiv 0, & D_i\gamma(1-v,v,0)&\equiv 0,\\ (\alpha+\beta+\gamma)|_{\partial\Delta}&\equiv 1, & D_i(\alpha+\beta+\gamma)|_{\partial\Delta}&\equiv 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Поверхность, задаваемая вектор-функцией $c(u,v,w)$, называется *поверхностью Кунса на треугольнике с граничными условиями первого порядка.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если выполнены условия* (16), *то вектор-функция* $c(u,v,w)$, *определяемая формулой* (15), *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} c(u,0,1-u)&=\alpha(u,0,1-u)g_1(u)+\gamma(u,0,1-u)g_1(u)=\\ &=\bigl(1-\beta(u,0,1-u)\bigr)g_1(u)=g_1(u),\\ c(1-v,v,0)&=\alpha(1-v,v,0)g_2(v)+\beta(1-v,v,0)g_2(v)=\\ &=\bigl(1-\gamma(1-v,v,0)\bigr)g_2(v)=g_2(v),\\ c(0,1-w,w)&=\beta(0,1-w,w)g_3(w)+\gamma(0,1-w,w)g_3(w)=\\ &=\bigl(1-\alpha(0,1-w,w)\bigr)g_3(w)=g_3(w). \end{aligned}$$

Для функций α, β, γ, c_1, c_2 и c_3 справедливо представление операторов D_i в форме (2). Поэтому

$$\begin{aligned} D_1(\alpha\, c_1)=\frac{\partial}{\partial w}(\alpha\, c_1)-\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\, c_1)=\frac{\partial\alpha}{\partial w}\,c_1+\alpha\,\frac{\partial c_1}{\partial w}-\frac{\partial\alpha}{\partial v}\,c_1-\alpha\,\frac{\partial c_1}{\partial v}=\\ =(D_1\alpha)c_1+(D_1c_1)\alpha. \end{aligned}$$

Аналогично

$$D_1(\beta\, c_2)=(D_1\beta)c_2+(D_1c_2)\beta, \qquad D_1(\gamma\, c_3)=(D_1\gamma)\,c_3+(D_1c_3)\gamma.$$

Проверим первое из условий (4):

$$\begin{aligned}D_1c(u,0,1-u) &= D_1\alpha(u,0,1-u)\,c_1(u,0,1-u) + \\ &\quad + \alpha(u,0,1-u)D_1c_1(u,0,1-u) + D_1\gamma(u,0,1-u)\,c_3(u,0,1-u) + \\ &\quad + \gamma(u,0,1-u)D_1c_3(u,0,1-u) = D_1\alpha(u,0,1-u)\,g_1(u) + \\ &\quad + D_1\gamma(u,0,1-u)\,g_1(u) + \alpha(u,0,1-u)\,f_1(u) + \gamma(u,0,1-u)\,f_1(u) = \\ &= \bigl(-D_1\beta(u,0,1-u)\bigr)g_1(u) + \bigl(1-\beta(u,0,1-u)\bigr)f_1(u) = f_1(u).\end{aligned}$$

Оставшиеся два условия из (4) проверяются аналогично. □

Осталось подобрать функции α, β и γ, удовлетворяющие условиям (16). Будем искать их в виде многочленов от переменных u, v, w.

Положим $\varphi(u,v) = \alpha(u,v,1-u-v)$. Тогда $\varphi(u,v)$ — многочлен от u и v, и справедливы равенства

$$\varphi(0,v) = \alpha(0,v,1-v) = 0, \quad \varphi_u(0,v) = D_2\alpha(0,v,1-v) = 0.$$

Значит, $\varphi(u,v) = u^2\widetilde{\varphi}(u,v)$, где $\widetilde{\varphi}(u,v)$ — некоторый многочлен. Следовательно,

$$\alpha(u,v,w) = u^2\,\widetilde{\varphi}(u,v) = u^2\,\widetilde{\varphi}(1-v-w,v).$$

Обозначим $\widetilde{\alpha}(v,w) = \widetilde{\varphi}(1-v-w,v)$.

Таким образом, $\alpha(u,v,w) = u^2\widetilde{\alpha}(v,w)$, где $\widetilde{\alpha}(v,w)$ — некоторый многочлен. В этом случае условия $\alpha(0,1-v,v)\equiv 0$ и $D_i\alpha(0,1-v,v)\equiv 0$ будут выполнены. Аналогично $\beta(u,v,w) = v^2\widetilde{\beta}(u,w)$, $\gamma(u,v,w) = w^2\,\widetilde{\gamma}(u,v)$. Положим

$$\tau(u,v,w) = \alpha(u,v,w) + \beta(u,v,w) + \gamma(u,v,w).$$

Осталось подобрать $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ таким образом, чтобы выполнялись условия $\tau|_{\partial\Delta}\equiv 1$, $D_i\tau|_{\partial\Delta}\equiv 0$.

Имеем $1 = \tau(1,0,0) = \widetilde{\alpha}(0,0)$. Далее,

$$0 = D_3\tau(1,0,0) = D_3\alpha(1,0,0) = \widetilde{\alpha}_v(0,0) - 2\,\widetilde{\alpha}(0,0),$$

поэтому $\widetilde{\alpha}_v(0,0) = 2$. Кроме того,

$$D_2\tau(1-v,v,0) = 2(1-v)\widetilde{\alpha}(v,0) - (1-v)^2\,\widetilde{\alpha}_w(v,0) + v^2\bigl(\widetilde{\beta}_u(1-v,0) - \widetilde{\beta}_w(1-v,0)\bigr).$$

При $v=0$ имеем

$$0 = D_2\tau(1,0,0) = 2\,\widetilde{\alpha}(0,0) - \widetilde{\alpha}_w(0,0).$$

Следовательно, $\widetilde{\alpha}_w(0,0) = 2$. А так как $D_2\tau(1-v,v,0)\equiv 0$, то

$$0 = \bigl(D_2\tau(1-v,v,0)\bigr)'(0) = -2\,\widetilde{\alpha}(0,0) + 2\,\widetilde{\alpha}_v(0,0) - \widetilde{\alpha}_{vw}(0,0) + 2\,\widetilde{\alpha}_w(0,0).$$

Таким образом, $\widetilde{\alpha}_{vw}(0,0) = 6$.

Итак, свободный член многочлена $\widetilde{\alpha}(v,w)$ равен 1, коэффициенты при v и w равны 2, коэффициент при vw равен 6. Предположим, что все остальные коэффициенты в $\widetilde{\alpha}(v,w)$ нулевые. Тогда $\widetilde{\alpha}(v,w) = 1+2v+2w+6vw$. Симметричным образом определим $\widetilde{\beta}(u,w)$ и $\widetilde{\gamma}(u,v)$. Имеем

$$\begin{aligned}\alpha(u,v,w) &= u^2(1+2v+2w+6vw),\\ \beta(u,v,w) &= v^2(1+2u+2w+6uw),\\ \gamma(u,v,w) &= w^2(1+2u+2v+6uv).\end{aligned} \tag{17}$$

Покажем, что $\alpha(u,v,w)+\beta(u,v,w)+\gamma(u,v,w) \equiv 1$ на Δ. Этого будет достаточно для выполнения условий (16). Для $(u,v,w)\in\Delta$ имеем

$$\begin{aligned}1-(u^2+v^2+w^2) &= (u+v+w)^2-(u^2+v^2+w^2) = 2(uv+vw+wu) =\\ &= 2(u+v+w)(uv+vw+wu) = 2(u^2v+u^2w+v^2u+v^2w+w^2u+w^2v)+\\ &+6uvw = 2u^2(v+w)+2v^2(u+w)+2w^2(u+v)+6uvw(u+v+w) =\\ &= \alpha(u,v,w)+\beta(u,v,w)+\gamma(u,v,w)-(u^2+v^2+w^2),\end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак, функции α, β и γ, определяемые равенствами (17), удовлетворяют условиям (16). Значит, их можно использовать для построения поверхности Кунса по формуле (15).

ПРИМЕР 1. Пусть граничные кривые представляют собой отрезки, соединяющие точки $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$:

$$g_1(u) = (1-u,0,u), \quad g_2(v) = (0,v,1-v), \quad g_3(w) = (w,1-w,0).$$

Условий согласования (8) и (10) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}f_1(0) &= f_1(1) = (1,-1,0),\\ f_2(0) &= f_2(1) = (-1,0,1),\\ f_3(0) &= f_3(1) = (0,1,-1).\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}f_1(u) &= \big(1+5u(1-u),\ -1+5u(1-u),\ 5u(1-u)\big),\\ f_2(v) &= \big(-1+5v(1-v),\ 5v(1-v),\ 1+5v(1-v)\big),\\ f_3(w) &= \big(5w(1-w),\ 1+5w(1-w),\ -1+5w(1-w)\big).\end{aligned}$$

Заданные вектор-функции удовлетворяют всем условиям согласования. Построенная по ним поверхность Кунса изображена на рис. 1.

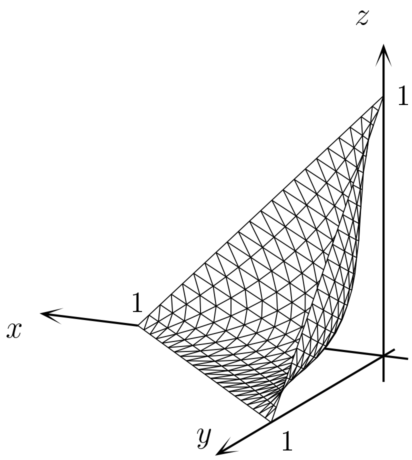

Рис. 1. Поверхность Кунса из примера 1

ПРИМЕР 2. Пусть граничные кривые представляют собой три дуги окружностей (см. рис. 2). Они задаются функциями

$$g_1(u) = \Big(1 + \sin\frac{3\pi u}{2},\ 0,\ 1 - \cos\frac{3\pi u}{2}\Big),$$
$$g_2(v) = \Big(0,\ 1 - \cos\frac{3\pi v}{2},\ 1 + \sin\frac{3\pi v}{2}\Big),$$
$$g_3(w) = \Big(1 - \cos\frac{3\pi w}{2},\ 1 + \sin\frac{3\pi w}{2},\ 0\Big).$$

Условия согласования (8) и (10) эквивалентны равенствам

$$f_1(0) = \big(-\tfrac{3\pi}{2}, 0, 0\big), \quad f_1(1) = 0,$$
$$f_2(0) = \big(0, 0, -\tfrac{3\pi}{2}\big), \quad f_2(1) = 0,$$
$$f_3(0) = \big(0, -\tfrac{3\pi}{2}, 0\big), \quad f_3(1) = 0.$$

Положим

$$f_1(u) = \Big(-\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi u}{2},\ \sin\pi u,\ 0\Big),$$
$$f_2(v) = \Big(\sin\pi v,\ 0,\ -\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi v}{2}\Big),$$
$$f_3(w) = \Big(0,\ -\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi w}{2},\ \sin\pi w\Big).$$

Поверхность Кунса, построенная по этим вектор-функциям, изображена на рис. 3.

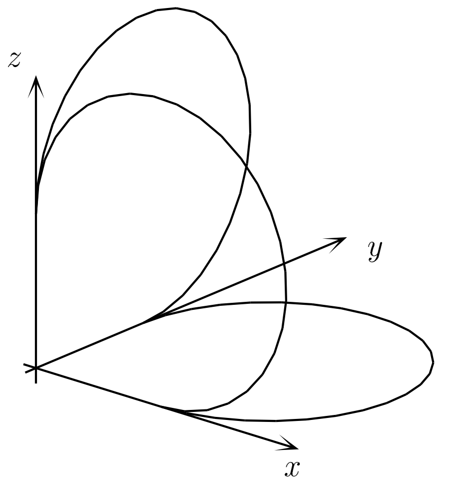

Рис. 2. Граничные кривые из примера 2

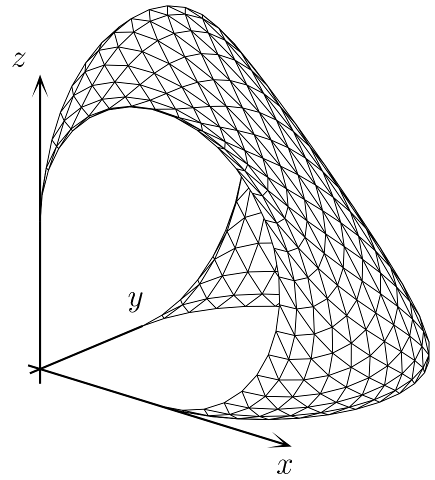

Рис. 3. Поверхность Кунса из примера 2

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Gregory. *Symmetric smooth interpolation on triangles*. Brunel University, 1973.

2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press, 2002.