ТЕЗИСЫ ДОКЛАДА Н. А. ВАВИЛОВА

ЧТО ДОКАЗЫВАЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

В последнее время все чаще обсуждается вопрос об изменении статуса доказательства и уменьшении нашей уверенности в справедливости результатов. Критика и скептицизм подобного рода наиболее энергично, часто и агрессивно озвучиваются в двух следующих направлениях.

– Сомнения в надежности доказательств, выполненных с помощью компьютера.

– Сомнения в надежности исключительно длинных и сложных доказательств.

Однако я склонен верить, что статус трудных современных результатов — и их доказательств! — мало отличается от статуса трудных математических результатов предшествующих веков. Я готов проиллюстрировать многочисленными историческими примерами, что фактические математические доказательства НИКОГДА — со времен греков — не удовлетворяли декларируемым стандартам.

Классические работы, как и публикуемые сегодня, полны заблуждений, ошибок и пробелов разной степени серьезности. Что гораздо хуже, часто эти заблуждения и ошибки из поколения в поколение воспроизводятся в монографиях и учебниках, и их обнаружение в некоторых случаях потребовало многих десятилетий.

Следуя Конфуцию, я приглашаю к вскрытию ошибок, а не к их замазыванию. Нужно честно признать, что математика является человеческой деятельностью, целью и результатом которой является понимание, и мало отличается в смысле своей надежности от других видов человеческой деятельности. Достоверность математического доказательства и его убедительность относится к области психологии и социологии, а не логики.

В отличие от любых доказательств, математическое знание КАК ТАКОВОЕ обладает ЧРЕЗВЫЧАЙНО высокой степенью надежности. Эта надежность, как и надежность естественно-научного и технического знания, гарантируется отнюдь не доказательствами индивидуальных результатов, а общей когерентностью математической и естественнонаучной картины мира, индивидуальным и коллективным пониманием и прямым контактом с миром идей, которое формируется в процессе работы у каждого квалифицированного и понимающего специалиста.

Вот, что знают о доказательстве практикующие математики, но боятся сказать:

– Математическое доказательство, РАССМАТРИВАЕМОЕ КАК ТЕКСТ, не доказывает ничего, кроме факта существования доказательств.

– Ни одно СЕРЬЕЗНОЕ математическое доказательство не может быть полностью формализовано, т. е. записано в соответствии со стандартами, пропагандируемыми математической логикой.

– Доказательство классификации простых конечных групп обладает ГОРАЗДО более высокой степенью достоверности, чем доказательства большинства общепризнанных классических результатов в области топологии, анализа или теории дифференциальных уравнений.

А что касается компьютерных вычислений, то лично я склонен доверять им больше, чем любым математическим доказательствам, КРОМЕ САМЫХ ПРОСТЫХ.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДА Ю. В. МАТИЯСЕВИЧА

Мои взгляды во многом противоположны взглядам первого докладчика. По меньшей мере 99.999% теорем, доказываемых современными математиками, выводятся из аксиом теории множеств, и потому эти теоремы в принципе могут быть изложены по всем канонам математической логики. Критерием может служить требование, чтобы доказательство было проверено компьютером.

Более того, реальная работа в этом направлении ведется давно, и на этом пути достигнут существенный прогресс. Примером могут служить полная формализация доказательства первой теоремы Геделя о неполноте и теоремы о четырех красках. Систематическое формальное изложение математики много лет ведется в рамках проекта MIZAR, результаты публикуются в журнале «Formalized mathematics» (`http://mizar.org/fm/`). Цели подобной формализации изложены в виде «QED manifesto»:

`http://en.wikipedia.org/wiki/QED_manifesto`

`http://www.cs.ru.nl/~freek/qed/qed.ps.gzi` (первоначальный вариант)

`http://mizar.org/trybulec65/8.pdf` (пересмотренная версия)

Если позволит время, во второй части доклада будет рассказано о новых взглядах на математическое доказательство с точки зрения информатики: интерактивных доказательствах с «нулевым знанием», доказательствах, которые не обязательно читать целиком, чтобы поверить в их правильность, и т. п.