О ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НУЛЯ НА МНОГОГРАННИК*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

10 июня 2009 г.

В докладе представлены три варианта постановки задачи о проектировании начала координат на выпуклый многогранник.

1°. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — точки из $\mathbb{R}^n$ и L — их выпуклая оболочка. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|x\|^2 \to \min_{x \in L}. \tag{1}$$

Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его x_*. Точка x_* имеет наименьшую евклидову норму среди всех точек из L. Она называется проекцией нуля на многогранник L.

Отметим, что

$$\langle x, x_* \rangle \geqslant \langle x_*, x_* \rangle \qquad \forall\, x \in L. \tag{2}$$

Действительно, возьмём произвольную точку x из L. Множество L выпуклое, поэтому при любом $\alpha \in (0,1)$ точка $x_* + \alpha(x - x_*)$ принадлежит L. По определению x_* имеем

$$\big\|x_* + \alpha(x - x_*)\big\|^2 \geqslant \|x_*\|^2,$$

что равносильно неравенству

$$2\alpha \langle x_*, x - x_* \rangle + \alpha^2 \|x - x_*\|^2 \geqslant 0 \qquad \forall\, \alpha \in (0,1).$$

Поделив на $\alpha > 0$ и перейдя к пределу при $\alpha \to +0$, получим неравенство, эквивалентное (2).

Из (2), в частности, следует, что

$$\langle a_i, x_* \rangle \geqslant \langle x_*, x_* \rangle, \qquad i \in 1:m. \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Обозначим через Ω множество точек $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\langle a_i, y\rangle \geqslant \langle y, y\rangle, \qquad i \in 1:m. \tag{4}$$

Очевидно, что $\mathbb{O} \in \Omega$. Кроме того, согласно (3), $x_* \in \Omega$. Учитывая, что (4) эквивалентно неравенствам

$$\|y - \tfrac{1}{2}\, a_i\|^2 \leqslant \|\tfrac{1}{2}\, a_i\|^2, \qquad i \in 1:m,$$

заключаем, что Ω есть пересечение шаров с центрами $\frac{1}{2}\, a_i$ и радиусами $\|\frac{1}{2}\, a_i\|$ при $i \in 1:m$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|y\|^2 \to \max_{y \in \Omega}. \tag{5}$$

Решение этой задачи существует.

ТЕОРЕМА 1. *Единственным решением задачи* (5) *является* x_*.

Доказательство. Зафиксируем $y \in \Omega$ и введём вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} \|v\|^2 \to \min, \\ \langle v, y\rangle \geqslant \langle y, y\rangle. \end{gathered} \tag{6}$$

Её единственным решением будет $v_* = y$ (см. рис. 1).

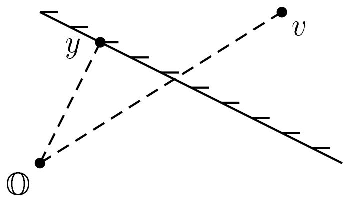

Рис. 1.

Действительно, для любого плана v задачи (6) имеем

$$\|v\|^2 = \|(v-y)+y\|^2 \geqslant \|v-y\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \|y\|^2.$$

Равенство $\|v\|^2 = \|y\|^2$ достигается только при $v = y$.

Множество планов задачи (6) обозначим $\Gamma(y)$. По определению Ω все точки a_i принадлежат $\Gamma(y)$, поэтому $\Gamma(y)$ содержит и их выпуклую оболочку, т. е. $L \subset \Gamma(y)$. Имеем

$$\|x_*\|^2 = \min_{x \in L} \|x\|^2 \geqslant \min_{v \in \Gamma(y)} \|v\|^2 = \|y\|^2.$$

Значит,

$$\|y\|^2 \leqslant \|x_*\|^2 \qquad \forall\, y \in \Omega.$$

Принимая во внимание, что $x_* \in \Omega$, заключаем, что x_* — решение задачи (5).

Проверим единственность решения. При $x_* = \mathbb{O}$ единственность очевидна. Пусть $x_* \neq \mathbb{O}$. Возьмём вектор $y_* \in \Omega$, такой, что $\|y_*\| = \|x_*\|$. Из условия $y_* \in \Omega$ следует, что

$$\langle x_*, y_* \rangle \geqslant \langle y_*, y_* \rangle = \|y_*\|^2.$$

Вместе с тем, в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\langle x_*, y_* \rangle \leqslant \|x_*\| \cdot \|y_*\| = \|y_*\|^2.$$

Приходим к равенству

$$\langle x_*, y_* \rangle = \|x_*\| \cdot \|y_*\|,$$

которое в случае ненулевых x_*, y_* возможно лишь тогда, когда $y_* = \lambda\, x_*$ при некотором $\lambda > 0$. На самом деле, $\lambda = 1$, поскольку $\|y_*\| = \|x_*\|$. Это означает, что $y_* = x_*$.

Теорема доказана. $\square$

Рис. 2 иллюстрирует содержание теоремы 1.

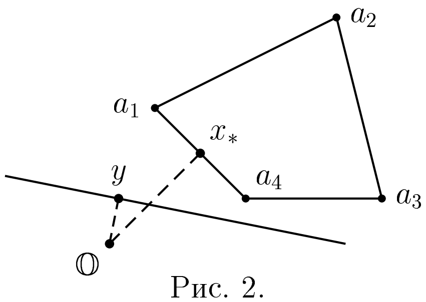

Рис. 2.

3°. З. Р. Габидуллина в работе [1] ввела в рассмотрение ещё одну экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \|z\|^2 \to \min, \\ \langle a_i, z \rangle \geqslant 1, \quad i \in 1 : m. \end{gathered} \tag{7}$$

Множество планов этой задачи обозначим G.

ТЕОРЕМА 2. *Множество G пусто тогда и только тогда, когда $\mathbb{O} \in L$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\mathbb{O} \in L$ означает, что существуют неотрицательные числа $u[i]$, $i \in 1 : m$, в сумме равные единице, такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} u[i]\, a_i = \mathbb{O}.$$

Если допустить при этом, что $G \neq \varnothing$, то придём к ложному неравенству $0 \geqslant 1$. Таким образом, из условия $\mathbb{O} \in L$ следует, что $G = \varnothing$.

Наоборот, пусть $G = \varnothing$. Это значит, что система линейных неравенств

$$\langle a_i, z \rangle \geqslant 1, \qquad i \in 1 : m,$$

несовместна. По теореме Фань-цзы [2, с. 25] найдутся числа $\lambda[i]$, $i \in 1 : m$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda[i]\, a_i = \mathbb{O},$$

$$\lambda[i] \geqslant 0, \quad i \in 1 : m; \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda[i] > 0.$$

Положив $u[i] = \lambda[i] / \sum_{i=1}^{m} \lambda[i]$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} u[i]\, a_i = \mathbb{O},$$

$$u[i] \geqslant 0, \quad i \in 1 : m; \quad \sum_{i=1}^{m} u[i] = 1,$$

так что $\mathbb{O} \in L$. Теорема доказана. □

Теорема 2 позволяет сделать следующий вывод: *множество планов задачи* (7) *пусто тогда и только тогда, когда решением задачи* (1) *является вектор* $x_* = \mathbb{O}$.

Предположим, что $G \neq \varnothing$. В этом случае задача (7) имеем единственное решение. Обозначим его z_*. Очевидно, что $z_* \neq \mathbb{O}$.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы равенства*

$$x_* = \frac{z_*}{\|z_*\|^2}\,, \qquad z_* = \frac{x_*}{\|x_*\|^2}\,. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим первое из равенств (8). Обозначим $\hat{y} = z_* / \|z_*\|^2$. При всех $i \in 1 : m$ имеем

$$\langle a_i, \hat{y} \rangle = \frac{\langle a_i, z_* \rangle}{\|z_*\|^2} \geqslant \frac{1}{\|z_*\|^2} = \langle \hat{y}, \hat{y} \rangle.$$

Значит, $\hat{y}$ — план задачи (5). По теореме 1

$$\|\hat{y}\|^2 \leqslant \|x_*\|^2. \tag{9}$$

Далее, вектор $\hat{z} = x_*/\|x_*\|^2$ является планом задачи (7), поэтому $\|\hat{z}\|^2 \geqslant \|z_*\|^2$, или $1/\|x_*\|^2 \geqslant \|z_*\|^2$, или

$$\|x_*\|^2 \leqslant \frac{1}{\|z_*\|^2} = \|\hat{y}\|^2. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что $\|\hat{y}\|^2 = \|x_*\|^2$. В силу единственности решения задачи (5) получаем $\hat{y} = x_*$, что соответствует первому равенству из (8).

Далее отметим, что $\|x_*\|^2 = 1/\|z_*\|^2$, так что $x_* = \|x_*\|^2 \, z_*$. Поделив на $\|x_*\|^2$, придём ко второму равенству из (8).

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габидуллина З. Р. *Теорема отделимости выпуклого многогранника от нуля пространства и её приложения в оптимизации* // Известия вузов. 2006. № 12. С. 21–26.

2. Гаврурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.