САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Просеков Олег Валерьевич

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ (МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2007 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского Государственного Университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор
Малозёмов Василий Николаевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
Рябов Виктор Михайлович,

кандидат физико-математических наук
Третьяков Алексей Андреевич

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет «ЛЭТИ»
имени В. И. Ульянова (Ленина)

Защита состоится 21 февраля 2008 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 по защите диссертаций на соискание учёной степени доктора наук при Санкт-Петербургском Государственном Университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан 14 января 2008 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Быстрые алгоритмы играют важную роль при обработке дискретных периодических сигналов, особенно в многомерном случае. Наиболее популярным и по-прежнему востребованным является быстрое преобразование Фурье (БПФ). Отметим, что теория БПФ далеко не проста. Классическими трудами по БПФ стали книги Макклеллана и Рейдера, Блейхута, Нуссбаумера.

Ключевой работой в теории БПФ явилась работа Кули и Тьюки 1965 года. Немаловажную роль в то время сыграло развитие вычислительных средств. В работе Кули и Тьюки приводится время работы реализации трёхмерного БПФ на «новых» тогда ЭВМ IBM 7094. С тех пор интерес к БПФ не угасает. В известном обзорном отчёте Барраса 1997 года упоминается более 3400 работ по БПФ. Большая часть из них — это работы, связанные с вычислительными аспектами БПФ и вопросами реализации БПФ на различных архитектурах ЭВМ. Вопрос о быстродействии стоит очень остро в связи с обработкой сигналов в реальном времени, а дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является базовой операцией для других алгоритмов, и быстродействие системы в целом сильно зависит от эффективной реализации БПФ. Типичные приложения — это цифровые устройства связи, аудио- и видеоустройства.

Несмотря на то, что эффективные алгоритмы БПФ существуют для практически любых длин периодов, длина, равная степени двойки, остаётся самой популярной. В этом случае БПФ достаточно легко реализуется, и основной вычислительный модуль «бабочка» задаётся всего несколькими инструкциями. Более сложный по реализации, но более эффективный алгоритм БПФ «split-radix» позволяет сократить число вещественных арифметических операций на 20%, а алгоритм, описанный в новой работе Фриго и Джонсона 2007 года, — ещё примерно на 6%.

Различные алгоритмы БПФ зависят от арифметических свойств длины периода сигнала. Если эта длина — число составное, то используется алгоритм Кули-Тьюки. В случае, когда длина сигнала может быть представлена в виде произведения попарно взаимно простых чисел, применим алгоритм простых множителей, разработанный Гудом в 1958 году. В вычислительном отношении алгоритм простых множителей проще алгоритма Кули-Тьюки.

Если длина сигнала является простым числом, то можно воспользоваться алгоритмом Рейдера. В этом случае задача вычисления ДПФ сводится к задаче вычисления циклической свёртки. Эффектное применение этой идеи нашёл Виноград для вычисления ДПФ небольшой длины. Задача быстрого вычисления циклической свёртки решается с помощью полиномиальной техники. По сути, метод Винограда даёт разложение матрицы Фурье малого порядка в произведение трёх матриц — матрицы предсложений, диагональной матрицы и матрицы постсложений. Такое разложение имеет целью минимизировать число умножений. Сложения оптимизируются вручную. Алгоритмы Винограда малых длин эффективно используются в алгоритмах БПФ для составных длин.

Идея факторизации матрицы Фурье представляется наиболее перспективной. Общий подход к построению быстрых алгоритмов связан с разложением матрицы Фурье в произведение слабо заполненных матриц. Поскольку такие разложения не единственны, возникает возможность выбора наилучших в некотором смысле разложений. Впервые на базе кронекерова умножения матриц факторизация матрицы Фурье была получена в работе Пиза 1968 года. В этой статье рассматривался вопрос о параллельных вычислениях. Позже в 1979 году Корном и Ламбиотом были получены факторизации матрицы Фурье, ориентированные на векторные вычисления.

В теории быстрых ортогональных преобразований важную роль играют перестановки. Обычно перестановки особым образом изменяют порядок входных или выходных отсчётов сигнала. Это не всегда удобно. Алгоритмы, не требующие перестановки данных до или после преобразования, получили название «self-sorting». Впервые такой алгоритм БПФ был получен Стокхемом в 1967 году. Другой алгоритм, основанный на факторизации матрицы Фурье, был разработан Глассманом. Детально такие алгоритмы рассмотрены в обзорной работе Темпертона 1983 года.

Особенно эффективно идея БПФ работает в многомерном случае. Традиционно используют построчно-столбцевой метод. В этом методе для каждой размерности применяется соответствующий одномерный алгоритм БПФ. Более эффективный двумерный алгоритм, похожий на алгоритм Кули-Тьюки, предложил Райворд в 1977 году. Использовать полиномиальные преобразования для вычисления ДПФ предложили Нуссбаумер и Квенделл. Другой алгоритм с похожими характеристиками получили Ауслендер, Фейг и Виноград.

Варианты БПФ основываются на разных представлениях (кодировании) индексов сигнала. Смешанный код используется в методе Кули-Тьюки (если длина периода равна степени двойки, то это бинарный код). Китайский и руритаский коды — в методе простых множителей. М. Б. Свердлик в своих работах середины 1980-х годов предложил обобщённое представление индексов, связанное с введении вектора параметров. Это послужило основой для параметрической факторизации матрицы Фурье.

Цель работы.

1) *Исследование различных вариантов факторизации матрицы Фурье на базе кронекерова умножения матриц.*

2) *Разработка общего подхода к вычислению ДПФ, основанного на параметрическом кодировании индексов.*

3) *Построение параметрического алгоритма БПФ в многомерном случае.*

4) *Получение более детальной факторизации матриц Фурье малых порядков.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовался математический аппарат дискретного гармонического анализа и матричной алгебры.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) *Выведены рекуррентные соотношения для матриц реверсных перестановок и на этой основе получены четыре факторизации таких матриц.*

2) *Получена наиболее глубокая параметрическая факторизация матрицы Фурье. Попутно указаны факторизации матриц параметрических перестановок.*

3) *Построена параметрическая факторизация матрицы Фурье в случае, когда её порядок представим в виде произведения попарно взаимно простых множителей. Для этого случая предложен вариант факторизации матрицы Фурье с последовательными перестановками.*

4) *Разработан параметрический алгоритм БПФ в многомерном случае для произвольной матрицы параметров.*

5) *Усовершенствованы факторизации матриц Фурье малых порядков* $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ *и* 16.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Построена параметрическая теория БПФ. С точки зрения реализации все полученные результаты ориентированы на параллельные и векторные вычисления. Это особенно актуально в связи с развитием современных технологий. Результаты диссертации могут быть использованы в цифровой обработке сигналов, например, для быстрого формирования характеристик направленности антенных решёток.

Апробация работы и публикации. По результатам диссертации сделаны доклады на семинаре кафедры исследования операций мат-мех факультета СПбГУ, на семинаре по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD), на седьмой международной конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (Санкт-Петербург, 8–10 июня 2004 г.). Некоторые результаты диссертации внедрены в

«Концерн «Океанприбор» при разработке цифровых гидроакустических комплексов. По теме диссертации опубликовано семь работ. В совместных работах [1, 4–6] научному руководителю принадлежит общая постановка задач и указание на идею исследования, а детальная реализация идеи полностью принадлежит диссертанту. В совместной работе [2] С. Н. Пахомов обосновал алгоритм быстрого вычисления реверсных перестановок. Работы [1, 2] опубликованы в издании по перечню ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 9 параграфов, списка литературы и одного приложения. Объём диссертации — 118 страниц. Список литературы насчитывает 51 наименование. В диссертации имеется 1 рисунок и 1 таблица.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

В первом параграфе детально анализируется кронекерово умножение матриц. Приводятся различные варианты факторизации кронекерова произведения нескольких матриц в обычное произведение. При этом важную роль играют матрицы реверсных перестановок.

Во втором параграфе рассматривается вопрос о факторизации матриц реверсных перестановок. Пусть s и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — натуральные числа, отличные от единицы. Введём обозначения

$$\begin{aligned} N &= n_1 n_2 \cdots n_s\,; \\ \Delta_\nu &= n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} \quad \text{при } \nu \in 2 : s+1, \;\; \Delta_1 = 1\,; \\ N_\nu &= n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s \quad \text{при } \nu \in 0 : s-1, \;\; N_s = 1\,. \end{aligned}$$

Очевидно, что $N_0 = N$ и $\Delta_\nu\, n_\nu\, N_\nu = N$ при всех $\nu \in 0 : s$. Любое число $i \in 0 : N-1$ с помощью последовательного деления можно единственным образом представить в виде

$$i = i_s\,(n_{s-1} \cdots n_1) + i_{s-1}\,(n_{s-2} \cdots n_1) + \cdots + i_2\, n_1 + i_1 = \sum_{\nu=1}^{s} i_\nu\, \Delta_\nu\,,$$

где $i_\nu \in 0 : n_\nu - 1$. Коэффициенты i_ν этого разложения образуют *смешанный код* числа i, $i = (i_s, \ldots, i_1)_{n_s,\ldots,n_1}$.

Реверсная перестановка связана с переворачиванием смешанного кода целых неотрицательных чисел:

$$\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\big((i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1)_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}\big) = (i_1, i_2, \ldots, i_s)_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\,.$$

Матрица реверсных перестановок определяется так:

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mathrm{rev}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(i), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что $\left(Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}\right)^T = Rev_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}$.

В диссертации получены четыре варианта факторизации матриц реверсных перестановок.

ТЕОРЕМА 2.2. *Справедливы разложения*

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(I_{\Delta_\nu} \otimes Rev_{n_\nu,N_\nu}\right), \tag{1}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=2}^{s} \left(I_{N_\nu} \otimes Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}\right), \tag{2}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(Rev_{n_{s-\nu},N_{s-\nu}} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}\right), \tag{3}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \prod_{\nu=0}^{s-2} \left(Rev_{\Delta_{s-\nu},n_{s-\nu}} \otimes I_{N_{s-\nu}}\right), \tag{4}$$

где $\otimes$ — операция кронекерова умножения и I_N — единичная матрица порядка N.

В правых частях формул (1)–(4) присутствуют матрицы Rev, зависящие только от двух параметров.

В третьем параграфе предлагаются различные варианты факторизации матрицы Фурье по методу Кули-Тьюки на базе кронекерова умножения матриц. Рассмотрим матрицу Фурье F_N с элементами

$$F_N[k,j] = \omega_N^{kj}, \qquad k,j \in 0 : N-1,$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы.

Справедливы разложения

$$F_N = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \left(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\right)\left(I_{\Delta_\nu} \otimes Twid_{N_\nu,n_\nu}\right)\right) Rev_{n_s,\ldots,n_1}, \tag{5}$$

$$F_N = \left(\prod_{\nu=1}^{s} Rev_{N/n_\nu,n_\nu}\left(I_{N/n_\nu} \otimes F_{n_\nu}\right) G_N^{(\nu)}\right) Rev_{n_s,\ldots,n_1}, \tag{6}$$

$$F_N = \left(\prod_{\nu=1}^{s} \bigl(F_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu}\bigr)\bigl(Twid_{N_\nu,n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\bigr) Rev_{N/n_\nu,n_\nu} \right) Rev_{n_s,\ldots,n_1}\,, \tag{7}$$

$$F_N = \prod_{\nu=1}^{s} \bigl(F_{n_\nu} \otimes I_{N/n_\nu}\bigr)\bigl(Twid_{N_\nu,n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\bigr)\bigl(Rev_{N_\nu,n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\bigr)\,. \tag{8}$$

Здесь $Twid_{N_\nu,n_\nu}$ и $G_N^{(\nu)}$ — диагональные матрицы вращений с элементами

$$Twid_{N_\nu,n_\nu}[i + j\,N_\nu, i + j\,N_\nu] = \omega_{N_{\nu-1}}^{ij}\,, \qquad i \in 0 : N_\nu - 1\,, \quad j \in 0 : n_\nu - 1\,;$$
$$G_N^{(\nu)}[i + j\,n_\nu, i + j\,n_\nu] = \omega_{N_{\nu-1}}^{i\,\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}\,, \quad i \in 0 : n_\nu - 1\,, \quad j \in 0 : N/n_\nu - 1\,.$$

Разложение (5) представляет собой наиболее общую и совершенную форму результата, полученного Кули и Тьюки. Формула (6) соответствует алгоритму БПФ, ориентированному на параллельные вычисления, а формула (7) — на векторные. В алгоритме БПФ, порождаемом формулой (8), не требуются перестановки данных до или после преобразования.

В четвёртом параграфе представлен усовершенствованный вариант общего подхода к вычислению ДПФ, предложенного М. Б. Свердликом. Предположим, что при всех $\nu \in 1 : s$ найдутся числа p_ν, q_ν из $1 : N - 1$, взаимно простые с n_ν, и натуральные D_ν, G_ν, такие, что любые $k, j \in 0 : N - 1$ допускают представления

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu D_\nu \right\rangle_N\,, \qquad j_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,,$$
$$k = \left\langle \sum_{\mu=1}^{s} k_\mu\, q_\mu G_\mu \right\rangle_N\,, \qquad k_\mu \in 0 : n_\mu - 1\,.$$

Векторы $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ и $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ будем называть *векторами параметров*.

Сокращение количества арифметических операций при вычислении ДПФ возможно в трёх случаях выбора базисов $\{D_\nu\}$ и $\{G_\mu\}$:

1) $D_\nu = B_\nu$ и $G_\mu = B_\mu$, где $B_\nu = N/n_\nu$. В этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1 : s$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту метода простых множителей для вычисления ДПФ.

2) $D_\nu = N_\nu$ и $G_\mu = \Delta_\mu$. В этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu} \prod_{\nu=2}^{s} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu\, p_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu-1} k_\mu\, q_\mu \Delta_\mu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1 : s$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту БПФ с прореживанием по времени.

3) $D_\nu = \Delta_\nu$ и $G_\mu = N_\mu$. В этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\mu=1}^{s} \omega_{n_\mu}^{k_\mu j_\mu} \prod_{\mu=2}^{s} \omega_{\Delta_{\mu+1}}^{k_\mu\, q_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu-1} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in 1 : s$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту БПФ с прореживанием по частоте.

В пятом параграфе рассматривается параметрический вариант метода простых множителей. Введём перестановку $\mathrm{perm}_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)}$, сопоставляющую числу $j = (j_s, \dots, j_1)_{n_s,\dots,n_1}$ число

$$\mathrm{perm}_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu B_\nu \right\rangle_N .$$

Эта перестановка определена и при $s = 1$. Запись $k = \mathrm{perm}_{n_1}^{(p_1)}(j)$ означает, что $k = \langle j\, p_1 \rangle_{n_1}$. Такая перестановка называется *эйлеровой*.

Матрица эйлеровых перестановок $Perm_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)}$ определяется стандартным способом. При $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1$ получим *матрицу руританских перестановок*.

ТЕОРЕМА 5.1. *Справедливо разложение*

$$Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)} = \bigl(Perm_{n_s}^{(p_s)} \otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \cdots \otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\bigr) \prod_{\nu=2}^{s} \bigl(I_{N_\nu} \otimes Perm_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1,1)}\bigr) .$$

Из теоремы 5.1 при $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1$ следует разложение матрицы руританских перестановок:

$$Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(1,1,\dots,1)} = \prod_{\nu=2}^{s} \bigl(I_{N_\nu} \otimes Perm_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1,1)}\bigr) .$$

Более того, само заключение теоремы 5.1 можно переписать в виде

$$Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)} = \bigl(Perm_{n_s}^{(p_s)} \otimes Perm_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \cdots \otimes Perm_{n_1}^{(p_1)}\bigr) Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(1,1,\dots,1)} .$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $N = n_1 n_2 \cdots n_s$, где сомножители n_ν попарно взаимно просты. Тогда при любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление*

$$F_N = \big(Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(q_1,q_2,\dots,q_s)}\big)^T \big(F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes F_{n_1}\big) Perm_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}, \qquad (9)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1 : s$.

В связи с теоремой 5.2 представляют интерес *самосопряжённые векторы параметров* p, такие, что сопряжённый вектор параметров q совпадает с p. В этом случае в разложении (9) присутствует только одна матрица перестановок. Обозначим через b_ν единственное на множестве $1 : n_\nu - 1$ решение уравнения $\langle x B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$. Самосопряжённый вектор параметров существует тогда и только тогда, когда при всех $\nu \in 1 : s$ число b_ν является квадратичным вычетом по модулю n_ν.

Пусть p_ν — решение уравнения $\langle x^2 \rangle_{n_\nu} = b_\nu$ при $\nu \in 1 : s$. В таком случае вектор параметров $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ будет самосопряжённым. Например, при $s = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 25$ существует четыре самосопряжённых вектора параметров: $p = (1, 12)$, $p = (1, 13)$, $p = (3, 12)$ и $p = (3, 13)$.

Ещё один пример: при $s = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ самосопряжённым будет руританский вектор параметров $p = (1, 1, 1)$. Самосопряжёнными руританские коды будут также в следующих случаях: $n = (2, 3, 7, 41)$, $n = (2, 3, 11, 13)$, $n = (2, 3, 7, 83, 85)$, $n = (2, 3, 11, 17, 59)$.

В шестом параграфе рассматривается параметрический метод быстрого преобразования Фурье в общем случае. Введём перестановки $\mathrm{mix}_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)}$ и $\mathrm{rev}_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)}$, сопоставляющие числу $j = (j_s, \dots, j_1)_{n_s,\dots,n_1}$ числа

$$\mathrm{mix}_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu \right\rangle_N,$$

$$\mathrm{rev}_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu N_\nu \right\rangle_N.$$

Матрицы перестановок $Mix_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)}$ и $Rev_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)}$ определяются стандартным способом. Отметим, что $Rev_{n_1,\dots,n_s}^{(p_1,\dots,p_s)} = Rev_{n_1,\dots,n_s}^{(1,\dots,1)} Mix_{n_s,\dots,n_1}^{(p_s,\dots,p_1)}$.

ТЕОРЕМА 6.1. *При $s \geqslant 2$ справедливы разложения*

$$Mix_{n_1,n_2,\dots,n_s}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \big(Mix_{n_{s-\nu},N_{s-\nu}}^{(p_{s-\nu},1)} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}\big),$$

$$Rev_{n_1,n_2,\ldots,n_s}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)} = \prod_{\nu=1}^{s}\Big(I_{N_\nu} \otimes Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,p_\nu)}\Big)\,.$$

Нам потребуется диагональная параметрическая матрица вращений $Twid$ с элементами

$$Twid_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},p_\nu)}[j,j] = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu\, p_\nu \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\, p_\alpha \Delta_\alpha}, \quad \nu \in 2:s\,.$$

Здесь $j = (j_\nu, j_{\nu-1}, \ldots, j_1)_{n_\nu,n_{\nu-1},\ldots,n_1}$. По определению $Twid_{n_1}^{(p_1)} = I_{n_1}$.

ТЕОРЕМА 6.2. *При $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ и любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление*

$$F_N = \big(Rev_{n_1,\ldots,n_s}^{(q_1,\ldots,q_s)}\big)^T \left(\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_{N_\nu} \otimes Twid_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},q_\nu)}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\right) Mix_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}\,,$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu\, p_\nu\rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1:s$.

Алгоритм БПФ, соответствующий факторизации матрицы Фурье в теореме 6.2, связан с прореживанием по частоте. Как следствие, можно получить факторизацию матрицы Фурье, соответствующую БПФ с прореживанием по времени:

$$F_N = \big(Mix_{n_s,\ldots,n_1}^{(q_s,\ldots,q_1)}\big)^T \left(\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\big)\big(I_{\Delta_\nu} \otimes Twid_{n_s,\ldots,n_{\nu+1},n_\nu}^{(q_s,\ldots,q_{\nu+1},p_\nu)}\big)\right) Rev_{n_s,\ldots,n_1}^{(p_s,\ldots,p_1)}\,.$$

Вектор параметров можно подобрать таким образом, что число нетривиальных элементов (отличных от ± 1 и $\pm i$) в параметрической матрице вращений уменьшится по сравнению с обычной (непараметрической) матрицей вращений. Например, если положить $n = (2,3,4)$, то $Twid_{2,3}^{(1,1)}$ содержит 2 нетривиальных элемента, $Twid_{2,3,4}^{(1,1,1)}$ — 12 элементов. Если положить $p = (3,2,3)$ и $q = (1,2,3)$, то в матрице $Twid_{2,3}^{(3,2)}$ все диагональные элементы станут тривиальными ($Twid_{2,3}^{(3,2)} = I_6$), а в матрице $Twid_{2,3,4}^{(3,2,3)}$ останется только 6 нетривиальных элементов.

В седьмом параграфе на основе предыдущих результатов предложен параметрический вариант метода простых множителей с последовательными перестановками. Для соответствующего алгоритма БПФ не требуются сложные перестановки данных до или после преобразования, а вычисления происходят совместно с перестановками.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть $N = n_1 n_2 \cdots n_s$, где сомножители n_ν попарно взаимно просты. Тогда при любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление*

$$F_N = \prod_{\nu=1}^{s} \Big(\big(\mathrm{Perm}_{n_\nu, N_\nu}^{(q_\nu,1)}\big)^T \otimes I_{\Delta_\nu} \Big) \Big(I_{N_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu} \Big) \Big(I_{N_\nu} \otimes \mathrm{Perm}_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1,p_\nu)} \Big),$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in 1 : s$.

В восьмом параграфе получен параметрический вариант БПФ в многомерном случае. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_t$ — натуральные числа, отличные от единицы. Введём обозначения

$$\begin{aligned}
m &= (m_1, m_2, \ldots, m_t)\,; \\
M &= m_1 m_2 \cdots m_t\,; \\
\Lambda_\mu &= m_1 m_2 \cdots m_{\mu-1} \qquad \text{при } \mu \in 2 : t+1, \quad \Lambda_1 = 1\,; \\
M_\mu &= m_{\mu+1} m_{\mu+2} \cdots m_t \quad \text{при } \mu \in 0 : t-1, \quad M_t = 1\,.
\end{aligned}$$

Многомерное дискретное преобразование Фурье сигнала $x_m \in C_{m_1} \times C_{m_2} \times \times \cdots \times C_{m_t}$, определяется формулой

$$X_m(k_1, k_2, \ldots, k_t) = \sum_{j_t=0}^{m_t-1} \cdots \sum_{j_2=0}^{m_2-1} \sum_{j_1=0}^{m_1-1} x_m(j_1, j_2, \ldots, j_t)\, \omega_{m_1}^{-k_1 j_1} \omega_{m_2}^{-k_2 j_2} \cdots \omega_{m_t}^{-k_t j_t}\,,$$

где $k_\mu \in 0 : m_\mu - 1$, $\mu \in 1 : t$.

От многомерного дискретного преобразования можно перейти к кронекерову произведению матриц преобразований по каждому измерению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $x(j_1 + j_2\, \Lambda_1 + \cdots + j_t\, \Lambda_t) = x_m(j_1, j_2, \ldots, j_t)$ и*

$$X = \big(\bar F_{m_t} \otimes \cdots \otimes \bar F_{m_2} \otimes \bar F_{m_1}\big)\, x\,,$$

где $\bar F_{m_\mu}[k, j] = \omega_{m_\mu}^{-kj}$, $k, j \in 0 : m_\mu - 1$, $\mu \in 1 : t$. Тогда

$$X_m(k_1, k_2, \ldots, k_t) = X(k_1 + k_2\, \Lambda_1 + \cdots + k_t\, \Lambda_t).$$

Рассмотрим один из вариантов факторизации матрицы $F_{m_t} \otimes \cdots \otimes F_{m_2} \otimes \otimes F_{m_1}$. Введём матрицу $n = \{n_{\nu,\mu}\}$ ($\nu \in 1 : s$, $\mu \in 1 : t$), такую, что $m_\mu = = n_{1,\mu} n_{2,\mu} \cdots n_{s,\mu}$. Считаем $n_{\nu,\mu} \geqslant 1$. Пусть

$$\begin{aligned}
\Delta_{\nu,\mu} &= n_{1,\mu} n_{2,\mu} \cdots n_{\nu-1,\mu} \qquad \text{при } \nu \in 2 : s+1, \quad \Delta_{1,\mu} = 1\,; \\
N_{\nu,\mu} &= n_{\nu+1,\mu} n_{\nu+2,\mu} \cdots n_{s,\mu} \quad \text{при } \nu \in 0 : s-1, \quad N_{s,\mu} = 1\,.
\end{aligned}$$

Выберем матрицу параметров $p = \{p_{\nu,\mu}\}$ ($\nu \in 1 : s$, $\mu \in 1 : t$), такую, что каждое $p_{\nu,\mu}$ взаимно просто с $n_{\nu,\mu}$.

ТЕОРЕМА 8.1. *При любой матрице параметров $p = \{p_{\nu,\mu}\}$ матрица $F_{m_t} \otimes \otimes \cdots \otimes F_{m_2} \otimes F_{m_1}$ допускает представление*

$$F_{m_t} \otimes \cdots \otimes F_{m_2} \otimes F_{m_1} = \big(R_m^{(q)}\big)^T \left(\prod_{\nu=1}^{s} T_m^{(\nu)} \prod_{\mu=1}^{t} \big(I_{M_\mu N_{\nu,\mu}} \otimes F_{n_{\nu,\mu}} \otimes I_{\Lambda_\mu \Delta_{\nu,\mu}}\big)\right) S_m^{(p)} ,$$

где $q = \{q_{\nu,\mu}\}$ — матрица сопряжённых параметров, элементы которой определяются условием $\langle q_{\nu,\mu} p_{\nu,\mu}\rangle_{n_{\nu,\mu}} = 1$; $S_m^{(p)}$ и $R_m^{(q)}$ — матрицы перестановок вида

$$S_m^{(p)} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \prod_{\mu=1}^{t} \big(I_{M_\mu} \otimes Mix^{(p_{s-\nu,\mu},1)}_{n_{s-\nu,\mu},N_{s-\nu,\mu}} \otimes I_{\Delta_{s-\nu,\mu}\Lambda_\mu}\big) ,$$

$$R_m^{(q)} = \prod_{\nu=1}^{s} \prod_{\mu=1}^{t} \big(I_{M_\mu N_{\nu,\mu}} \otimes Rev^{(1,q_{\nu,\mu})}_{\Delta_{\nu,\mu},n_{\nu,\mu}} \otimes I_{\Lambda_\mu}\big) ;$$

$T_m^{(\nu)}$ — диагональная матрица с элементами

$$T_m^{(\nu)}\Big[\sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu, \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\alpha=1}^{s} j_{\alpha,\mu}\, \Delta_{\alpha,\mu}\Lambda_\mu\Big] = \prod_{\mu=1}^{t} \omega_{\Delta_{\nu+1,\mu}}^{j_{\nu,\mu}\, q_{\nu,\mu} \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_{\alpha,\mu}\, p_{\alpha,\mu} \Delta_{\alpha,\mu}} ,$$

где $\nu \in 2 : s$, $\mu \in 1 : t$ и $j_\alpha \in 0 : n_{\alpha,\mu} - 1$.

Рассмотрен пример, демонстрирующий преимущество параметрического подхода. Пусть $m = (24, 6, 2)$ и $n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. В матрице $T_m^{(2)}$ все диагональные элементы тривиальные ($T_m^{(2)} = I_{288}$). В матрице $T_m^{(3)}$ среди диагональных элементов 72 нетривиальных. В непараметрическом случае (все $p_{\nu,\mu}$ и $q_{\nu,\mu}$ равны единице) в матрице $T_m^{(2)}$ среди диагональных элементов 96 нетривиальных, а в матрице $T_m^{(3)}$ — 180 нетривиальных.

Девятый параграф замыкает тему БПФ. Все факторизации матрицы Фурье, рассмотренные ранее, содержат матрицы Фурье малых порядков, которые для более эффективного вычисления ДПФ тоже необходимо факторизовать. Напомним, что ДПФ определятся формулой

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \omega_N^{-kj} , \qquad k \in 0 : N-1 . \tag{10}$$

Быстрый алгоритм Винограда вычисления ДПФ, разработанный в 1978 году, основан на приведении формулы (10) к виду

$$X = CBA\, x . \tag{11}$$

Здесь B — диагональная матрица, ответственная за умножения, A и C — матрицы, элементы которых равны 0, 1 или -1. Матрицы A и C называются соответственно матрицей предсложений и матрицей постсложений.

Факторизация (11) имеет целью минимизировать число умножений. Чтобы минимизировать число сложений, нужно факторизовать матрицы A и C, т. е. перейти к разложению

$$X = C_1 C_2 \dots C_m \, B \, A_n A_{n-1} \dots A_1 \, x \,, \tag{12}$$

в котором сомножители C_k и A_l обладают следующими свойствами: их элементы по-прежнему равны 0, 1 или -1, но в каждой строке этих сомножителей содержится, по возможности, не более двух отличных от нуля элементов.

Разложение (12) не единственно, поэтому можно ставить дополнительные условия. Например, можно потребовать, чтобы матрицы C_k и A_l были, в основном, симметричными, чтобы значение -1 стояло, по возможности, на диагоналях и т. д. Такие дополнительные условия трудно формализовать. В диссертации приведён вывод «совершенных» разложений вида (12) при $N = 3, 4, 5, 6$. В приложении указаны разложения при $N = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16$. В таблице 1 приведены характеристики полученных алгоритмов.

Таблица 1. Характеристики алгоритмов БПФ

Порядок алгоритма БПФ	Число сомножителей в факторизации	Порядок диагональной матрицы	Число умножений	Число сложений
2	1	2	0	2
3	5	3	2	6
4	3	4	0	8
5	7	6	5	17
6	6	6	4	18
7	7	9	8	36
8	6	8	2	26
9	7	12	10	42
10	8	12	10	44
11	9	21	20	84
12	7	12	8	48
16	9	18	10	74

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *О быстром преобразовании Фурье малых порядков* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. 1 (№ 1). С. 36–45.

2. Пахомов С. Н., Просеков О. В. *Вычислительные аспекты быстрого преобразования Фурье* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. Вып. 4. С. 44–50.

3. Просеков О. В. *Алгоритмы быстрого преобразования Фурье для нетрадиционного числа точек* // Труды седьмой международной конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». 8–10 июня 2004 г. Санкт-Петербург. С. 394–399.

4. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Факторизация матриц реверсных перестановок* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-04. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#04`)

5. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрический вариант метода простых множителей* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-05. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#05`)

6. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Параметрическая факторизация матрицы Фурье* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-06. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#06`)

7. Просеков О. В. *Параметрический вариант многомерного быстрого преобразования Фурье* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2007-07. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2007/index.html#07`)

Полный текст диссертации можно найти в Интернете по адресу

`http://dha.spb.ru/prosekov/`