УДК 519.677

В. Н. Малоземов, А. А. Третьяков

НОВЫЙ ПОДХОД К АЛГОРИТМУ КУЛИ-ТЬЮКИ*

1°. Пусть n – натуральное число и $N = 2^n$. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами.*

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ сопоставляет сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. В 1965 году Кули и Тьюки предложили быстрый алгоритм вычисления ДПФ [1]. В данной заметке мы покажем, что алгоритм Кули–Тьюки связан с построением последовательности ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$.

2°. Возьмем единичный N-периодический импульс $\delta_N(j)$,

$$\delta_N(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0 & \text{при всех остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

С его помощью любой сигнал x можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Вместе с тем, по формуле обращения для ДПФ [2]

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\omega_N^{jk}, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00269)

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

где коэффициенты $X(k)$ вычисляются по формуле (1). Таким образом, дискретное преобразование Фурье обеспечивает переход от разложения сигнала x по базису $\{\delta_N(j-k)\}_{k=0}^{N-1}$ к разложению по базису $\{N^{-1}\omega_N^{jk}\}_{k=0}^{N-1}$.

Построим последовательность промежуточных базисов $\{\mu_s(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $s=0,1,...,n$. Для этого нам потребуется перестановка reverse (сокращенно rev). Число $j \in 0:2^n-1$ можно записать в двоичном коде, содержащем n двоичных разрядов. Перестановка reverse сопоставляет числу j число $\mathrm{rev}(j)$, двоичный код которого равен перевернутому двоичному коду числа j. Отметим легко проверяемые свойства перестановки reverse: при $m \in 0:2^{n-1}-1$

$$2\,\mathrm{rev}(2m) = \mathrm{rev}(m), \tag{2}$$

$$\mathrm{rev}(2m+1) = 2^{n-1} + \mathrm{rev}(2m). \tag{3}$$

Обратимся к построению промежуточных базисов. Сигнал $\mu_s(k;j)$ как элемент пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $\mu_s(k)$. Положим $N_s = N/2^s$ и

$$\mu_0(r) = \delta_N(\cdot - r), \qquad r \in 0:N-1;$$

$$\mu_s(2mN_s + r) = \\ = \frac{1}{2}[\mu_{s-1}(2mN_s + r) + \omega_N^{\mathrm{rev}(2m)}\mu_{s-1}((2m+1)N_s + r)], \tag{4}$$

$$\mu_s((2m+1)N_s + r) = \\ = \frac{1}{2}[\mu_{s-1}(2mN_s + r) - \omega_N^{\mathrm{rev}(2m)}\mu_{s-1}((2m+1)N_s + r)]. \tag{5}$$

Здесь $r \in 0:N_s-1$, $m \in 0:2^{s-1}-1$, $s=1,2,...,n$.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\mu_s(lN_s + r) = \frac{1}{2^s}\sum_{q=0}^{2^s-1}\mu_0(qN_s + r)\omega_N^{q\,\mathrm{rev}(l)}, \tag{6}$$

где $r \in 0:N_s-1$, $l \in 0:2^s-1$, $s \in 0:n$.

Доказательство. При $s = 0$ формула (6) тривиальна. При $s = 1$ формулы (4), (5) принимают вид

$$\mu_1(r) = \frac{1}{2}[\mu_0(r) + \mu_0(N_1 + r)], \qquad r \in 0 : N_1 - 1;$$

$$\mu_1(N_1 + r) = \frac{1}{2}[\mu_0(r) - \mu_0(N_1 + r)], \qquad r \in 0 : N_1 - 1.$$

Это соответствует (6), если учесть, что

$$\omega_N^{\mathrm{rev}(1)} = \omega_N^{N/2} = -1.$$

Сделаем индукционный переход от $s-1$ к s. Рассмотрим два случая.

1) $l = 2m$, $m \in 0 : 2^{s-1} - 1$. Согласно индукционному предположению и формулам (4), (2), при $r \in 0 : N_s - 1$ имеем

$$\mu_s(lN_s + r) = \mu_s(2mN_s + r) =$$

$$= \frac{1}{2}[\mu_{s-1}(mN_{s-1} + r) + \omega_N^{\mathrm{rev}(2m)}\mu_{s-1}(mN_{s-1} + N_s + r)] =$$

$$= \frac{1}{2^s}\left[\sum_{q=0}^{2^{s-1}-1} \mu_0(qN_{s-1} + r)\omega_N^{q\,\mathrm{rev}(m)} + \right.$$

$$\left. + \omega_N^{\mathrm{rev}(2m)} \sum_{q=0}^{2^{s-1}-1} \mu_0(qN_{s-1} + N_s + r)\omega_N^{q\,\mathrm{rev}(m)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^s}\left[\sum_{q=0}^{2^{s-1}-1} \mu_0(2qN_s + r)\omega_N^{2q\,\mathrm{rev}(2m)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{2^{s-1}-1} \mu_0((2q+1)N_s + r)\omega_N^{(2q+1)\,\mathrm{rev}(2m)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{2^s-1} \mu_0(kN_s + r)\omega_N^{k\,\mathrm{rev}(l)}.$$

2) $l = 2m + 1$, $m \in 0 : 2^{s-1} - 1$. Согласно индукционному пред-

положению и формулам (5), (2), при $r \in 0 : N_s - 1$ имеем

$$\mu_s(lN_s + r) = \mu_s((2m+1)N_s + r) =$$
$$= \frac{1}{2^s}\left[\sum_{q=0}^{2^{s-1}-1} \mu_0(2qN_s + r)\omega_N^{2q\,\mathrm{rev}(2m)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{q=0}^{2^{s-1}-1} \mu_0((2q+1)N_s + r)\omega_N^{(2q+1)\,\mathrm{rev}(2m)}\right].$$

Остается учесть, что в силу (3)

$$\omega_N^{\mathrm{rev}(2m)} = \omega_N^{\mathrm{rev}(2m+1)-N/2} = -\omega_N^{\mathrm{rev}(l)}.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\mu_n(l;j) = N^{-1}\omega_N^{j\,\mathrm{rev}(l)}, \qquad l \in 0 : N-1. \tag{7}$$

Действительно, согласно (6)

$$\mu_n(l;j) = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} \delta_N(j-q)\omega_N^{q\,\mathrm{rev}(l)} = \frac{1}{N}\omega_N^{j\,\mathrm{rev}(l)}.$$

3°. Введем в $\mathbb{C}_N$ скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$$

и норму $||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Теорема. *При всех $s = 0, 1, ..., n$ системы сигналов*

$$\{\mu_s(lN_s + r) | r \in 0 : N_s - 1,\ l \in 0 : 2^s - 1\}$$

ортогональны. При этом

$$||\mu_s(lN_s + r)||^2 = 2^{-s}. \tag{8}$$

Доказательство. При $s = 0$ утверждение очевидно. Формула (8) при $s \in 1 : n$ легко выводится из (6). Остается проверить ортогональность:

$$\langle \mu_s(lN_s + r), \mu_s(l'N_s + r') \rangle = 0, \tag{9}$$

если $l \neq l'$ или $r \neq r'$. При $r \neq r'$ равенство (9) непосредственно следует из (6), поскольку индексные множества $\{r, r + N_s, ..., r + +(2^s - 1)N_s\}$ и $\{r', r' + N_s, ..., r' + (2^s - 1)N_s\}$ не имеют общих точек.

Пусть $r = r'$, но $l \neq l'$. Положим $p = \mathrm{rev}(l) - \mathrm{rev}(l')$. По условию $p \neq 0$ и $|p| < N$. Кроме того, p допускает представление

$$p = \pm \left(p_1 2^{n-1} + p_2 2^{n-2} + \cdots + p_s 2^{n-s} \right), \tag{10}$$

где коэффициенты p_k равны 0 или 1. Это связано с тем, что $l, l' \in 0 : 2^s - 1$. Теперь имеем на основании (6) и (10)

$$\langle \mu_s(lN_s + r), \mu_s(l'N_s + r) \rangle = \\ = 2^{-2s} \sum_{q=0}^{2^s-1} \omega_N^{qp} = 2^{-2s} \left(\omega_N^{2^s p} - 1 \right) (\omega_N^p - 1)^{-1} = 0.$$

Теорема доказана.

4°. Согласно теореме, произвольный сигнал x при любом $s \in 0 : n$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k) \mu_s(k), \tag{11}$$

где $x_s(k) = 2^s \langle x, \mu_s(k) \rangle$. Для коэффициентов $x_s(k)$ справедливы рекуррентные соотношения

$$x_0(k) = x(k), \qquad k \in 0 : N - 1;$$

$$x_s(2mN_s + r) = \\ = x_{s-1}(2mN_s + r) + \omega_N^{-\mathrm{rev}(2m)} x_{s-1}((2m + 1)N_s + r), \tag{12}$$

$$x_s((2m+1)N_s+r) =$$
$$= x_{s-1}(2mN_s+r) - \omega_N^{-\operatorname{rev}(2m)} x_{s-1}((2m+1)N_s+r). \quad (13)$$

Здесь $r \in 0:N_s-1,\ m \in 0:2^{s-1}-1,\ s=1,2,...,n$. Формулы (12), (13) очевидным образом следуют из (4), (5).

При $s=n$ согласно (7) имеем

$$x_n(k) = 2^n\langle x, \mu_n(k)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-j\operatorname{rev}(k)} = X(\operatorname{rev}(k)).$$

Таким образом, вычислительная схема (12), (13), которая и называется алгоритмом Кули-Тьюки, позволяет вычислить компоненты ДПФ сигнала x в ревертированном порядке. Попутно вычисляются коэффициенты разложения (11) сигнала x по всем промежуточным ортогональным базисам. Это расширяет возможности цифровой обработки сигналов.

5°. Формулы (12), (13) допускают обращение

$$x_{s-1}(2mN_s+r) = \frac{1}{2}[x_s(2mN_s+r) + x_s((2m+1)N_s+r)], \quad (14)$$

$$x_{s-1}((2m+1)N_s+r) =$$
$$= \frac{1}{2}\omega_N^{\operatorname{rev}(2m)}[x_s(2mN_s+r) - x_s((2m+1)N_s+r)], \quad (15)$$
$$r \in 0:N_s-1,\ m \in 0:2^{s-1}-1.$$

Если сигнал x задан в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_n(k)\mu_n(k;j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_n(k)\omega_N^{j\operatorname{rev}(k)},$$

то для вычисления его компонент $x(j)$ можно воспользоваться схемой (14), (15) при $s=n,n-1,...,1$. В результате получим при $k \in 0:N-1$

$$x_0(k) = \langle x, \mu_0(k)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\delta_N(j-k) = x(k).$$

Литература

1. *Cooley J. W., Tukey J. W.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. 1965. Vol. 19. P. 297–301.

2. *Макклеллан Дж. Х. , Рейдер Ч. М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М., 1983. 264 с.

УДК 519.677

Малоземов В. Н., Третьяков А. А. **Новый подход к алгоритму Кули-Тьюки.** // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 199 Вып. (№). С. 00–00

Показано, что алгоритм Кули-Тьюки позволяет получить разложения сигнала по некоторой последовательности ортогональных базисов.

Библиогр. 2 назв.

Резюме

Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Новый подход к алгоритму Кули-Тьюки.

Показано, что алгоритм Кули-Тьюки позволяет получить разложения сигнала по некоторой последовательности ортогональных базисов.

Summary

V. N. Malozemov. A. A. Tretyakov. A new approach to the Cooley-Tukey algorithm.

It is shown that the Cooley-Tukey algorithm allows to obtain expansions of a signal with respect to some sequence of orthogonal bases.