УДК 621.391.1 : 519.27

В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный, А. А. Третьяков

БЫСТРОЕ ВЕЙВЛЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ[1]

Построено простое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений, отличное от преобразования Хаара. Выведены расчетные формулы декомпозиции и реконструкции.

1°. Пусть n – натуральное число и $N = 2^n$. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей (*сигналов*) $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\delta_N(j)$ — единичный N-периодический импульс,

$$\delta_N(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0 & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В данной заметке мы покажем, как от представления (1) перейти к вейвлетному разложению сигнала x. Базовой будет следующая формула

$$\delta_N(j) + \delta_N(j - N/2) = \delta_{N/2}(j) = \delta_N(2j). \tag{2}$$

2°. Положим $N_s = N/2^s$ и построим последовательность сигналов $\{\mu_s(k;j)\}_{k=0}^{N_s-1}$, $s = 0, 1, ..., n$, с помощью рекуррентного соотношения

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00269)

$$\mu_0(k;j) = \delta_N(j-k), \quad k = 0,1,...,N-1;$$
$$\mu_s(k;j) = \tfrac{1}{2}[\mu_{s-1}(k;j) + \mu_{s-1}(k+N_s;j)], \tag{3}$$
$$k = 0,1,...,N_s-1, \qquad s = 1,2,...,n.$$

Согласно (2), $\mu_s(k;j) = 2^{-s}\delta_{N_s}(j-k)$. В частности, $\mu_n(0;j) \equiv 1/N$. Положив $\varphi_s(j) = 2^{-s}\delta_{N_s}(j)$, получим

$$\mu_s(k;j) = \varphi_s(j-k), \quad k = 0,1,...,N_s-1. \tag{4}$$

Обозначим через V_s линейную оболочку, натянутую на сигналы $\{\mu_s(k;j)\}_{k=0}^{N_s-1}$. В силу (4), $V_s = \mathbb{C}_{N_s}$. Отметим, что $V_0 \supset V_1 \supset ... \supset V_n$. Здесь $V_0 = \mathbb{C}_N$ и V_n — одномерное пространство комплексных констант.

Построим еще n последовательностей сигналов $\{\eta_s(k;j)\}_{k=0}^{N_s-1}$ по формуле

$$\eta_s(k;j) = \tfrac{1}{2}[\mu_{s-1}(k;j) - \mu_{s-1}(k+N_s;j)], \tag{5}$$
$$k = 0,1,...,N_s-1, \qquad s = 1,2,...,n.$$

Согласно (4)

$$\eta_s(k;j) = \tfrac{1}{2}[\varphi_{s-1}(j-k) - \varphi_{s-1}(j-k-N_s)] =: \psi_s(j-k), \tag{6}$$

где $\psi_s(j) = 2^{-s}[\delta_{N_{s-1}}(j) - \delta_{N_{s-1}}(j-N_s)]$. В частности,

$$\psi_1(j) = \tfrac{1}{2}[\delta_N(j) - \delta_N(j-N/2)],$$
$$\psi_n(j) = \tfrac{1}{N}[\delta_2(j) - \delta_2(j-1)].$$

Отметим, что

$$\psi_{s+1}(j) = \tfrac{1}{2}\psi_s(2j), \qquad s = 1,2,...,n-1.$$

Действительно, в силу (2)

$$\psi_s(2j) = 2^{-s}[\delta_{N_{s-1}}(2j) - \delta_{N_{s-1}}(2(j-N_{s+1}))] =$$
$$= 2^{-s}[\delta_{N_s}(j) - \delta_{N_s}(j-N_{s+1})] = 2\psi_{s+1}(j).$$

Через W_s обозначим линейную оболочку, натянутую на сигналы $\{\eta_s(k;j)\}_{k=0}^{N_s-1}$. Согласно (5), $W_s \subset V_{s-1}$.

Т е о р е м а 1. *Справедливо равенство*

$$W_s = \{w \in \mathbb{C}_{N_{s-1}} \mid w(j-N_s) = -w(j),\ j \in \mathbb{Z}\}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество, стоящее в правой части (7), обозначим через G_s. Покажем вначале, что $W_s \subset G_s$.

Пусть $w \in W_s$. Тогда $w \in V_{s-1} = \mathbb{C}_{N_{s-1}}$ и

$$w(j) = \sum_{k=0}^{N_s-1} a(k)\psi_s(j-k).$$

Поскольку $\psi_s(j-k-N_s) = -\psi_s(j-k)$, то $w(j-N_s) = -w(j)$. Таким образом, $w \in G_s$. Включение $W_s \subset G_s$ установлено.

Пусть теперь $w \in G_s$. Тогда

$$w(j) = \sum_{k=0}^{2N_s-1} w(k)\delta_{N_{s-1}}(j-k).$$

Так как $w(j-N_s) = -w(j)$, то

$$w(j) = -\sum_{k=0}^{2N_s-1} w(k)\delta_{N_{s-1}}(j-k-N_s).$$

Сложив два последние равенства и умножив результат на 2^{-s}, получим

$$2^{-s+1}w(j) = \sum_{k=0}^{2N_s-1} w(k)\psi_s(j-k) = \sum_{k=0}^{N_s-1} w(k)\psi_s(j-k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N_s-1} w(k+N_s)\psi_s(j-k-N_s) = \sum_{k=0}^{N_s-1} [w(k) - w(k+N_s)]\psi_s(j-k).$$

Это значит, что $w \in W_s$. Включение $G_s \subset W_s$ установлено.

Объединяя два включения $W_s \subset G_s$ и $G_s \subset W_s$, приходим к равенству (7). Теорема доказана.

3°. Введем в $\mathbb{C}_N$ скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$$

и норму $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Сигналы $\mu_s(k;j)$ и $\eta_s(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $\mu_s(k)$ и $\eta_s(k)$ соответственно.

Т е о р е м а 2. *При каждом фиксированном* $s \in \{1, 2, ..., n\}$ *система сигналов*

$$\left\{ \{\mu_s(k)\}_{k=0}^{N_s-1} \ , \ \{\eta_s(k)\}_{k=0}^{N_s-1} \right\} \tag{8}$$

образует ортогональный базис в V_{s-1} . *Квадрат нормы всех сигналов, входящих в систему* (8), *равен* 2^{-s}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале разберемся с нормой. Согласно (4) и (6) имеем

$$||\mu_s(k)||^2 = ||\varphi_s||^2 = 2^{-2s}||\delta_{N_s}||^2 = 2^{-s},$$

$$||\eta_s(k)||^2 = ||\psi_s||^2 = 2^{-2s}||\delta_{N_{s-1}}(\cdot) - \delta_{N_{s-1}}(\cdot - N_s)||^2 = 2^{-s}.$$

Далее, очевидно, что системы $\{\mu_s(k)\}_{k=0}^{N_s-1}$ и $\{\eta_s(k)\}_{k=0}^{N_s-1}$ порознь ортогональны. Проверим, что

$$\langle \mu_s(k), \eta_s(l)\rangle = 0 \tag{9}$$

при всех $k, l \in \{0, 1, ..., N_s - 1\}$. На основании (3) и (5) запишем

$$\langle \mu_s(k), \eta_s(l)\rangle =$$

$$= \tfrac{1}{4}\langle \mu_{s-1}(k) + \mu_{s-1}(k + N_s),\ \mu_{s-1}(l) - \mu_{s-1}(l + N_s)\rangle =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\langle \mu_{s-1}(k),\ \mu_{s-1}(l)\rangle - \langle \mu_{s-1}(k + N_s),\ \mu_{s-1}(l + N_s)\rangle\right].$$

Это равенство приводит к (9) как при $k \neq l$, так и при $k = l$.

Установлено, что система (8) ортогональна. Поскольку все ее элементы принадлежат V_{s-1} и их количество совпадает с размерностью V_{s-1}, то система (8) образует базис пространства V_{s-1}. Теорема доказана.

Полученный результат можно переформулировать так: *пространство* V_{s-1} *разлагается в ортогональную сумму подпространств*

V_s *и* W_s, $V_{s-1} = V_s \oplus W_s$. Другими словами, W_s есть ортогональное дополнение V_s до V_{s-1}. Подпространство W_s называется *вейвлетным* подпространством.

4°. Разложим $\mathbb{C}_N = V_0$ по схеме

$$\begin{array}{ccccccccc} V_0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V_n \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & W_1 & & W_2 & & \cdots & & W_n \end{array}$$

Придем к формуле

$$\mathbb{C}_N = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus V_n. \tag{10}$$

Т е о р е м а 3. *Любой сигнал* $x \in \mathbb{C}_N$ *допускает представление*

$$x(j) = \alpha + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=0}^{N_s-1} x_s(k)\psi_s(j-k), \tag{11}$$

где $\alpha = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидным образом следует из (10), (6) и того факта, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_s(j) = 0 \quad \text{при} \quad s = 1, 2, ..., n. \tag{12}$$

Отметим, что наряду с (12) справедлива более точная формула

$$\sum_{j=0}^{N_{s-1}-1} \psi_s(j) = 0 \quad \text{при} \quad s = 1, 2, ..., n.$$

Формула (11) называется *вейвлетным разложением* сигнала x.

5°. Переход от разложения (1) к разложению (11) называется *декомпозицией* сигнала x, а обратный переход — *реконструкцией*. Выведем расчетные формулы декомпозиции и реконструкции.

Положим $\alpha_s(k) = 2^s \langle x, \mu_s(k) \rangle$. В частности,

$$\alpha_n(0) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) = N\alpha. \tag{13}$$

Согласно (3)

$$\alpha_0(k) = x(k), \qquad k = 0, 1, ..., N-1;$$

$$\alpha_s(k) = \alpha_{s-1}(k) + \alpha_{s-1}(k + N_s),$$
$$k = 0, 1, ..., N_s - 1, \quad s = 1, 2, ..., n.$$

Теперь умножим (11) скалярно на $\psi_s(j-k)$. В силу ортогональности получим $\langle x, \psi_s(\cdot - k)\rangle = 2^{-s} x_s(k)$, или, согласно (5) и (6),

$$x_s(k) = 2^s \langle x, \eta_s(k)\rangle = \alpha_{s-1}(k) - \alpha_{s-1}(k + N_s).$$

Приходим к формулам декомпозиции

$$\begin{aligned} &\alpha_0(k) = x(k), \qquad k = 0, 1, ..., N-1; \\ &\alpha_s(k) = \alpha_{s-1}(k) + \alpha_{s-1}(k + N_s), \\ &x_s(k) = \alpha_{s-1}(k) - \alpha_{s-1}(k + N_s), \\ &k = 0, 1, ..., N_s - 1, \quad s = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{14}$$

К этому нужно добавить равенство $\alpha = \alpha_n(0)/N$, следующее из (13).

Формулы (14) допускают обращение :

$$\begin{aligned} &\alpha_n(0) = N\alpha, \\ &\alpha_{s-1}(k) = \tfrac{1}{2}[\alpha_s(k) + x_s(k)], \\ &\alpha_{s-1}(k + N_s) = \tfrac{1}{2}\left[\alpha_s(k) - x_s(k)\right], \\ &k = 0, 1, ..., N_s - 1, \quad s = n, n-1, ..., 1. \end{aligned} \tag{15}$$

По формулам (15) производится реконструкция сигнала, при этом $x(k) = \alpha_0(k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$.

Пример. Рассмотрим случай $n = 3$, $N = 8$. На рис. 1 представлена таблица, которая заполняется в процессе декомпозиции и реконструкции. На рис. 2 изображены базисные сигналы вейвлетного разложения ψ_1, ψ_2, ψ_3. В табл. 1 приведены результаты декомпозиции сигнала $x = (0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$.

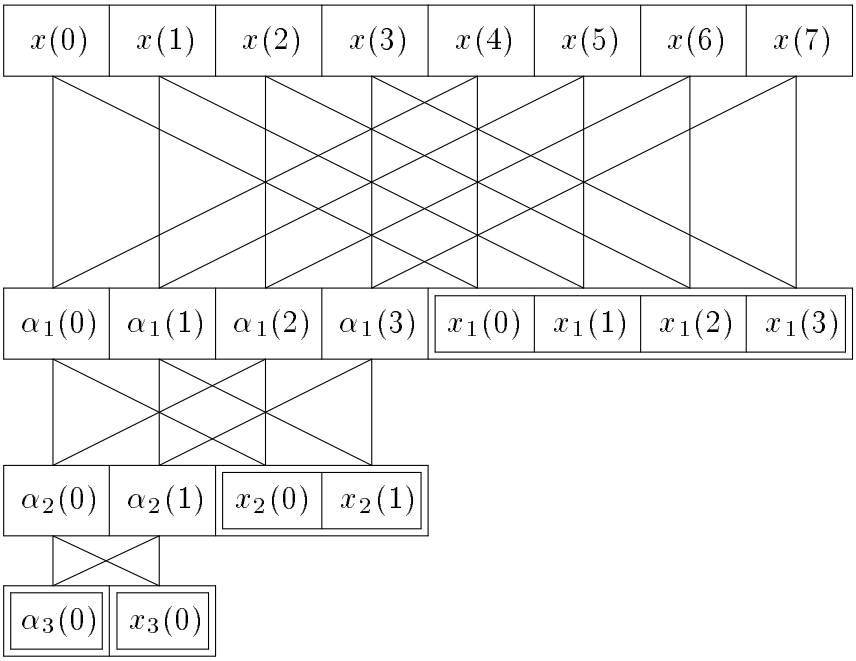
$x(0)$ $x(1)$ $x(2)$ $x(3)$ $x(4)$ $x(5)$ $x(6)$ $x(7)$
$\alpha_1(0)$ $\alpha_1(1)$ $\alpha_1(2)$ $\alpha_1(3)$ $x_1(0)$ $x_1(1)$ $x_1(2)$ $x_1(3)$
$\alpha_2(0)$ $\alpha_2(1)$ $x_2(0)$ $x_2(1)$
$\alpha_3(0)$ $x_3(0)$

Рис. 1

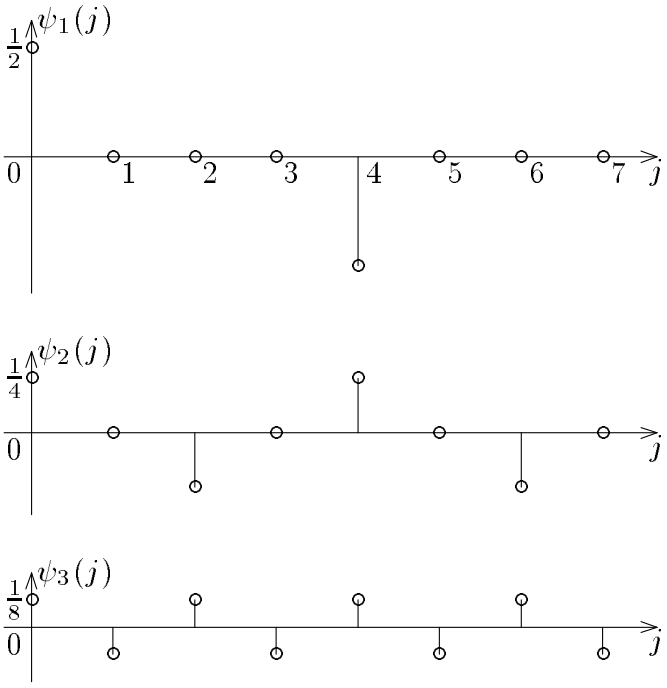
$\psi_1(j)$
$\frac{1}{2}$
0 1 2 3 4 5 6 7 j
$\psi_2(j)$
$\frac{1}{4}$
0 j
$\psi_3(j)$
$\frac{1}{8}$
0 j

Рис. 2

Таблица 1

0	1	2	3	4	3	2	1
4	4	4	4	**-4**	**-2**	**0**	**2**
8	8	**0**	**0**				
16	**0**						

Замечание. Треугольная таблица вейвлетного преобразования является частью прямоугольной таблицы (с тем же количеством строк и столбцов), которая заполняется при вычислении дискретного преобразования Фурье по алгоритму Кули-Тьюки [1, 2]. Таким образом, в процессе выполнения алгоритма Кули-Тьюки осуществляется, в частности, быстрое вейвлетное преобразование.

6°. К вейвлетному разложению (11) приводит также следующее неформальное соображение. Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно представить в виде

$$x(j) = \tfrac{1}{2}[x(j) + x(j-N_1)] + \tfrac{1}{2}[x(j) - x(j-N_1)] =: v_1(j) + w_1(j),$$

где $v_1 \in \mathbb{C}_{N_1}$ и $w_1(j-N_1) = -w_1(j)$. Согласно (1)

$$v_1(j) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)[\delta_N(j-k) + \delta_N(j-k-N_1)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{2N_1-1} x(k)\varphi_1(j-k) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \alpha_1(k)\varphi_1(j-k).$$

Аналогично

$$w_1(j) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)[\delta_N(j-k) - \delta_N(j-k-N_1)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{2N_1-1} x(k)\psi_1(j-k) = \sum_{k=0}^{N_1-1} x_1(k)\psi_1(j-k).$$

Слагаемое w_1 является вейвлетной составляющей. Что касается слагаемого v_1, то оно принадлежит $\mathbb{C}_{N_1}$ и может быть

разложено по той же схеме $v_1(j) = v_2(j) + w_2(j)$, где

$$v_2(j) = \sum_{k=0}^{N_2-1} \alpha_2(k)\varphi_2(j-k), \quad w_2(j) = \sum_{k=0}^{N_2-1} x_2(k)\psi_2(j-k).$$

Продолжая этот процесс, приходим к формуле (11).

7°. Обратимся к двумерному случаю. По-прежнему считаем, что $N = 2^n$. Обозначим через $\mathbb{C}_{NN}$ линейное пространство комплекснозначных последовательностей $x = \{x(j,k)\}$, $j,k \in \mathbb{Z}$, N-периодических по каждому аргументу. Элементы пространства $\mathbb{C}_{NN}$ будем называть *изображениями*.

Каждое изображение $x \in \mathbb{C}_{NN}$ допускает представление

$$x(j,k) =$$

$$= \tfrac{1}{4}[x(j,k) + x(j,k-N_1) + x(j-N_1,k) + x(j-N_1,k-N_1)] +$$
$$+ \tfrac{1}{4}[x(j,k) - x(j,k-N_1) + x(j-N_1,k) - x(j-N_1,k-N_1)] +$$
$$+ \tfrac{1}{4}[x(j,k) + x(j,k-N_1) - x(j-N_1,k) - x(j-N_1,k-N_1)] +$$
$$+ \tfrac{1}{4}[x(j,k) - x(j,k-N_1) - x(j-N_1,k) + x(j-N_1,k-N_1)] =$$
$$= v_1(j,k) + w_1^{(1)}(j,k) + w_1^{(2)}(j,k) + w_1^{(3)}(j,k).$$

Поскольку

$$x(j,k) = \sum_{p,q=0}^{N-1} x(p,q)\delta_N(j-p)\delta_N(k-q),$$

то

$$v_1(j,k) = \sum_{p,q=0}^{2N_1-1} x(p,q)\varphi_1(j-p)\varphi_1(k-q) =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{N_1-1} \alpha_1(p,q)\varphi_1(j-p)\varphi_1(k-q),$$

где

$$\alpha_1(p,q) = x(p,q) + x(p,q+N_1) + x(p+N_1,q) + x(p+N_1,q+N_1).$$

Аналогично показывается, что

$$w_1(j,k) := w_1^{(1)}(j,k) + w_1^{(2)}(j,k) + w_1^{(3)}(j,k) =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{3} x_1^{(l)}(p,q)\Psi_1^{(l)}(j-p,k-q).$$

Здесь $\Psi_1^{(1)}(j,k) = \varphi_1(j)\psi_1(k)$, $\Psi_1^{(2)}(j,k) = \psi_1(j)\varphi_1(k)$, $\Psi_1^{(3)}(j,k) = \psi_1(j)\psi_1(k)$ и

$$x_1^{(1)}(p,q) = x(p,q) - x(p,q+N_1) + x(p+N_1,q) - x(p+N_1,q+N_1),$$

$$x_1^{(2)}(p,q) = x(p,q) + x(p,q+N_1) - x(p+N_1,q) - x(p+N_1,q+N_1),$$

$$x_1^{(3)}(p,q) = x(p,q) - x(p,q+N_1) - x(p+N_1,q) + x(p+N_1,q+N_1).$$

В представлении $x = v_1 + w_1$ слагаемое w_1 является вейвлетной составляющей, а v_1 принадлежит $\mathbb{C}_{N_1N_1}$. Очевидно, что v_1 можно разложить по той же схеме $v_1 = v_2 + w_2 = v_2 + w_2^{(1)} + w_2^{(2)} + w_2^{(3)}$. Продолжив этот процесс, придем к следующему результату.

Теорема 4. *Любое изображение $x \in \mathbb{C}_{NN}$ допускает представление*

$$x(j,k) = \frac{\alpha_n(0,0)}{N^2} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{p,q=0}^{N_s-1} \sum_{l=1}^{3} x_s^{(l)}(p,q)\Psi_s^{(l)}(j-p,k-q), \quad (16)$$

где $\Psi_s^{(1)}(j,k) = \varphi_s(j)\psi_s(k)$, $\Psi_s^{(2)}(j,k) = \psi_s(j)\varphi_s(k)$, $\Psi_s^{(3)}(j,k) = \psi_s(j)\psi_s(k)$. Коэффициенты в представлении (16) вычисляются по рекуррентным формулам

$$\alpha_0(p,q) = x(p,q), \quad p,q = 0,1,...,N-1;$$

$$\alpha_s(p,q) = \alpha_{s-1}(p,q)+\alpha_{s-1}(p,q+N_s)+\alpha_{s-1}(p+N_s,q)+\alpha_{s-1}(p+N_s,q+N_s),$$
$$x_s^{(1)}(p,q) = \alpha_{s-1}(p,q)-\alpha_{s-1}(p,q+N_s)+\alpha_{s-1}(p+N_s,q)-\alpha_{s-1}(p+N_s,q+N_s),$$
$$x_s^{(2)}(p,q) = \alpha_{s-1}(p,q)+\alpha_{s-1}(p,q+N_s)-\alpha_{s-1}(p+N_s,q)-\alpha_{s-1}(p+N_s,q+N_s),$$
$$x_s^{(3)}(p,q) = \alpha_{s-1}(p,q)-\alpha_{s-1}(p,q+N_s)-\alpha_{s-1}(p+N_s,q)+\alpha_{s-1}(p+N_s,q+N_s),$$

$$p,q = 0,1,...,N_s-1, \quad s = 1,2,...,n.$$

Эти формулы можно обратить

$$\alpha_{s-1}(p,q) = \tfrac{1}{4}[\alpha_s(p,q) + x_s^{(1)}(p,q) + x_s^{(2)}(p,q) + x_s^{(3)}(p,q)],$$

$$\alpha_{s-1}(p,q+N_s) = \tfrac{1}{4}[\alpha_s(p,q) - x_s^{(1)}(p,q) + x_s^{(2)}(p,q) - x_s^{(3)}(p,q)],$$

$$\alpha_{s-1}(p+N_s,q) = \tfrac{1}{4}[\alpha_s(p,q) + x_s^{(1)}(p,q) - x_s^{(2)}(p,q) - x_s^{(3)}(p,q)],$$

$$\alpha_{s-1}(p+N_s,q+N_s) = \tfrac{1}{4}[\alpha_s(p,q) - x_s^{(1)}(p,q) - x_s^{(2)}(p,q) + x_s^{(3)}(p,q)],$$

$$p,q = 0,1,...,N_s-1, \quad s = n,n-1,...,1.$$

В результате получим $x(j,k) = \alpha_0(j,k), \quad j,k = 0,1,...,N-1.$

Тем самым решен вопрос о вейвлетной декомпозиции и реконструкции изображений.

8°. К выводу формулы (16) можно подойти более формально. Введем в $\mathbb{C}_{NN}$ скалярное произведение

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j,k=0}^{N-1} x(j,k)\overline{y(j,k)}$$

и норму $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Определим подпространство $\mathbf{V}_s$ с помощью тензорного произведения $\mathbf{V}_s = V_s \otimes V_s$. Это значит, что $\mathbf{V}_s$ есть линейная оболочка, натянутая на изображения $\Phi_s(j-p,k-q)$, $p,q = 0,1,...,N_s-1$, где $\Phi_s(j,k) = \varphi_s(j)\varphi_s(k)$. Очевидно, что $\mathbf{V}_s = \mathbb{C}_{N_sN_s}$. В частности, $\mathbf{V}_0 \supset \mathbf{V}_1 \supset \cdots \supset \mathbf{V}_n$. Здесь $\mathbf{V}_0 = \mathbb{C}_{NN}$ и $\mathbf{V}_n$ — одномерное пространство комплексных констант. Обозначим через $\mathbf{W}_s$ ортогональное дополнение $\mathbf{V}_s$ до $\mathbf{V}_{s-1}$. Имеем

$$\mathbf{V}_{s-1} = V_{s-1} \otimes V_{s-1} = (V_s \oplus W_s) \otimes (V_s \oplus W_s) =$$

$$= (V_s \otimes V_s) \oplus (V_s \otimes W_s) \oplus (W_s \otimes V_s) \oplus (W_s \otimes W_s).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{W}_s = (V_s \otimes W_s) \oplus (W_s \otimes V_s) \oplus (W_s \otimes W_s).$$

Базис в $\mathbf{W}_s$ состоит из ортогональных сдвигов

$$\Psi_s^{(l)}(j-p,k-q), \quad p,q = 0,1,...,N_s-1, \quad l = 1,2,3.$$

Разложим $\mathbb{C}_{NN} = \mathbf{V}_0$ по схеме

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{V}_0 & \longrightarrow & \mathbf{V}_1 & \longrightarrow & \mathbf{V}_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{V}_n \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & \mathbf{W}_1 & & \mathbf{W}_2 & & \cdots & & \mathbf{W}_n \end{array}$$

Придем к формуле

$$\mathbb{C}_{NN} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}_n \oplus \mathbf{V}_n.$$

Эта формула соответствует вейвлетному разложению (16).

9°. В данной заметке мы описали простейшее вейвлетное преобразование сигналов и изображений, отличное от преобразования Хаара [3]. Вейвлетному анализу в настоящее время посвящена обширная литература. Отметим лишь инициирующую работу [4]. Теория кратно-масштабного анализа пространства $\mathbb{C}_N$ построена в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cooley J. W., Tukey J. W.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. 1965. V. 19. № 90. P. 297–301.

2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.

3. *Sweldens W., Schrőder P.* Building your own wavelets at home. In: Wavelets in Computer Graphics. ACM SIGGRAPH Course Notes. 1996. P. 15–87.

4. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. № 7. P. 909–996.

5. *Петухов А. П.* Периодические дискретные всплески // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. Вып. 3. С. 151–183.